

## CARF ワーキングペーパー

CARF-J-006

### 多期間リスク管理法と変額年金保険

東京大学大学院経済学研究科

国友 直人

一場 知之

2004 年 6 月

現在、CARFは第一生命、日本生命、野村ホールディングス、みずほフィナンシャルグループ、三井住友銀行、三菱東京UFJ銀行、明治安田生命（五十音順）から財政的支援をいただいております。CARFワーキングペーパーはこの資金によって発行されています。

CARFワーキングペーパーの多くは  
以下のサイトから無料で入手可能です。

[http://www.carf.e.u-tokyo.ac.jp/workingpaper/index.\\_j.cgi](http://www.carf.e.u-tokyo.ac.jp/workingpaper/index._j.cgi)

このワーキングペーパーは、内部での討論に資するための未定稿の段階にある論文草稿です。著者の承諾無しに引用・複写することは差し控えて下さい。

# 多期間リスク管理法と変額年金保険\*

国友直人<sup>†</sup>

一場知之<sup>‡</sup>

2004年6月

## 要約

本稿では変額年金保険のリスク管理問題に関するカナダ・アクチュアリー会 (CIA) の報告で議論されている金融リスク評価法について、統計学的に妥当とは考えられない問題があることを指摘する。次に統計的金融リスク管理の方法としてより実際的と思われるノンパラメトリック統計学 (nonparametric statistics) に基づく多期間 VaR 計測法 (靴ひもリスク管理法) を提案し、その統計学的根拠を述べる。

## 鍵言葉

変額年金保険のリスク管理、中期・長期の VaR、移動分位点 VaR 法、靴ひも (bootstrap) リスク管理法、ブロック・ブートストラップ、条件付裾期待値 (CTE)

---

\*この論文は変額年金保険問題に関する日本アクチュアリー会の検討委員との議論の中で気がついたことに基づいているが、同会の関係者は内容には全く責任はない。論文は第 32 回日本統計学会年次大会 (岩手県花巻市・富士大学において 2004 年 9 月 3 日 ~ 6 日に開催予定) の企画セッション「統計学と保険」で報告される。

<sup>†</sup>東京大学大学院経済学研究科教授

<sup>‡</sup>東京大学大学院経済学研究科院生

## 1. はじめに

近年の金融業や保険業における金融リスク管理分野で標準的リスク管理手段とされている統計的方法は一般に VaR(value-at-risk、バリュー・アット・リスク)法と呼ばれている。この方法は一定期間における企業の損益のリスクを計る目的で開発されたが、統計学においては古くから知られている分布の分位点(パーセント点)を求める問題と同一である。したがって、与えられた分布の分位点をデータより推定する問題は、統計学の古典的問題と解釈できるので、これまでに幾つかの統計的方法が開発されてきている。

例えば、あらかじめデータが正規分布からの独立な標本と見なすことができる場合には、分位点を推定することは統計学の初歩的な議論を用いれば可能であり、もっとも簡便な方法と考えられよう。実際、金融リスク管理論においては、正規分布にもとづく VaR の評価法が標準的方法として説明され、国際的銀行業におけるいわゆる BIS 規制<sup>1</sup>の中で採用されてきている。金融リスク管理におけるより複雑な統計的方法としては例えば、価格ボラティリティ(volatility)に関するパラメトリック・モデルを利用する方法や統計的極値理論(extreme value theory)を利用する方法などがこれまでに議論されてきている。後者の方法も一種のパラメトリック・モデル(あるいはセミ・パラメトリック法と呼ばれる)に基づいて議論されることが多いので、これら既存の統計的 VaR 計測法はパラメトリック VaR 法と呼んで差し支えないであろう。

他方、統計学分野では確率分布の具体的表現についてはほとんど仮定しない統計的方法はノン・パラメトリック統計学と呼ばれている。一般に観察されるデータがしたがうと見なせる確率分布が正規分布である等の事前的知識に乏しい場合も少なくない。また、特に金融市場で観察されるデータについてはしばしば正規分布に基づいて金融リスク管理を行うことから生じる問題点も既に指摘されて来ている。こうした経緯を振り返って見ると、VaR 等の金融リスク管理問題を考察する上でもノン・パラメトリック統計学の方法には重要な役割があることが期待できよう。ノン・パラメトリック統計学によりデータの分布を考察する場合には与えられたデータの経験分布関数(empirical distribution function)が基本である。特に価格データより求められる収益率分布のデータが互いに独立な確率変数の実現値と見なせるときには、データの経験分布関数により VaR 値を推定することが自然であり、理論的にも正当化できることは古くから知られている。本稿では経験分位点(empirical quantiles)を利用する方法を経験 VaR 推定法と呼ぶことにしよう。ここでの重要な論点は仮に収益率データが互いに独立でない確率変数であったとしても、経験分位点を利用することが可能なことが近年のノン・パラメトリック統計学では知られていることであろう。

本稿の主要な目的は特定なパラメトリック・モデルに依存しないノン・パラメトリック統計学に基づく統計的 VaR 法、すなわち経験 VaR 推定法を考察することである。特に収益率の計測期間が1単位期間とは限らない多期間となる VaR 推定法に分析の焦点を当てる。元々、証券業や銀行業における金融リスク管理分野においては、より具体的に1日を計測単位とする1期間 VaR を設定することによりリスク管理を行う方法が議論され、規制の基準とされている。これに対し

<sup>1</sup>金融リスク管理に関して近年議論されている基本的問題や基礎的事項については例えば Jorion (2000) を参照されたい。

て、例えば変額年金保険に代表されるような保険市場のリスク管理に置いては、例えば1ヶ月を計測単位としたより長期における多期間 VaR のリスク管理が重要な問題となる。保険市場において取引されている金融商品の多くは、契約期間が1年以上であることが珍しくなく、むしろ生命保険分野においては一般的であろう。本稿ではこうした変額年金保険に関連した金融市場における中期・長期の金融リスク管理における基本的問題を議論し、短期 VaR 計測法と同一とは限らない統計的基準が必要であり、より重要であることを指摘する。そして業界の一部で通説となっている誤った考えを指摘し、統計学的により妥当と考えられる方法についてその性質を説明する。

ここで取りあげようとしている中期・長期における VaR (バリュー・アット・リスク) の推定問題は保険業と証券業と言った伝統的な業態がかなり分離されている状況においては、それほど差し迫った現実的な問題ではなかったとも考えられる。しかしながら、日本を含めて近年の先進国における年金保険市場や証券市場など金融市場は様々な側面において統合化に向かっている。したがって、ここで取りあげる多期間 VaR 推定の問題は実務的にも極めて重要な金融リスク管理の問題と考えられるのである。

本稿の構成をあらかじめ説明しておく、2節では生命保険業界の一部で考察されている VaR によるリスク管理を巡る統計的問題を説明する。次に3節では多期間 VaR 推定問題を定式化し、簡便な統計的方法として考えられる移動分位点による VaR 推定の方法の性能について考察する。4節ではノン・パラメトリック統計学における統計的ブートストラップ (bootstrap) の考え方を利用する金融リスク管理法を提案する。5節ではカナダと日本のマーケット収益率の分析結果を報告し、本研究の考察で得られた結果を6節にまとめる。なお、本稿で導いた数理的結果の証明はその概略をまとめて7節に与えておく。

## 2. CIA 評価法

生命保険業界において伝統的に対象とされてきている不確実性の源泉は保険加入者、あるいは年金加入者の死亡リスクである。死亡リスクの評価に関しては生命表が定期的に作成されており、死亡リスクについては保険加入者の間で横断的に大数法則 (law of large numbers) が成立する状況を想定した死亡リスクの統計的管理法について様々な方法が考えられてきた。ところが、近年では保険業を取り巻く環境が激変し、世界的規模における金融市場のグローバル化という環境変化の中で、保険業と証券業の垣根が低くなってきている。そして、業界の垣根を越えた様々な金融商品が開発され、金融市場で販売されるようになってきている。例えば最低所得保障型の年金保険など証券市場に連動した保険などの年金保険商品が開発され、その市場規模が拡大傾向にある。これらの変額年金保険は派生証券論 (デリバティブ) における一種のプット・オプション契約と見なすことができる場合が多いが、保険会社が直接に長期のプット・オプション契約から派生するリスクをヘッジすることは困難であろう。本稿では資本市場の動向に連動した新しい年金保険商品のことを一括して変額年金保険と呼ぶことにしておく。

変額年金保険におけるリスク管理の問題は現下の金融業や保険業では実務的にも、また規制当局にとっても重要な問題となりつつある。特に伝統的に保険商

品の評価と開発に携わってきたアクチュアリー（保険数理人）にとっては重要な課題となってきたと言えるであろう。この変額年金保険問題については特にカナダのアクチュアリー協会（Canadian Institute of Actuaries、略してCIA）では特にタスク・フォースを作り、精力的に検討を行いレポート（CIA レポート）を公表している。そのレポートでは変額保険を巡る様々な問題を議論しているが、本節ではまずレポートが議論している VaR 推定問題に限定してその評価法についてまず検討しよう。

CIA レポートで利用したデータは TSE300(トロント株価指数) の 1956 年 1 月 ~ 1999 年 12 月の月次収益率の系列である。このデータを利用して収益率の月次系列より 1 年収益率、5 年収益率、10 年収益率、の 2.5% 分位点 VaR、5% 分位点 VaR、10% 分位点 VaR のそれぞれの推定値を示している。CIA レポートが採用した方法は次のような手順であると解釈される。

(i) 価格データ (時刻  $t$  の価格系列を  $S_t$  とする) より計測期間が互いに重ならない収益率データを計算する。得られたデータ数は月次収益率は 527 個、年次収益率は 43 個、5 年収益率は 8 個、10 年収益率は 4 個が得られる。

(ii) 43 個の年次収益率より  $n = 43$  とすると、データの最小値により  $\frac{1}{n+1} = 2.27\%$  の VaR 推定値とする。

(iii) 月次対数収益率  $R_{t,T} (= \log(S_T/S_t))$  に対して幾何ブラウン運動モデル

$$(2.1) \quad R_{t,T} \cong N\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma^2(T-t)\right] \quad (t = 1, \dots, T)$$

を仮定する。(ここで  $N(\cdot, \cdot)$  は正規分布を意味し、原データ数  $T = 528$  としている。)そして年次収益率に換算してドリフト係数とボラティリティの推定を行い、推定値  $\hat{\mu} = 10.9860\%$ ,  $\hat{\sigma} = 15.6277\%$  を得る。

(iv) 標準正規分布の分布関数を  $\Phi(\cdot)$  とすると

$$(2.2) \quad \Phi\left(\frac{\log(Y_\alpha) - (\hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma}^2}{2})\Delta t}{\hat{\sigma}\sqrt{\delta t}}\right) = \alpha \quad (0 < \alpha < 1)$$

により分位点  $Y_\alpha$  を推定する。ここで、 $\Phi(\cdot)$  は標準正規分布の分布関数、 $\Delta t$  は期間の長さをそれぞれ意味している。この式を利用すれば、例えば  $\alpha = 0.025$  であれば  $Y_{0.025} = .76$  となる。このことを根拠にボラティリティ推定値を調整 (calibrate) して、 $\hat{\sigma}^* = 18.7140\%$  と設定する。そして、このボラティリティ調整値を真値として、幾何ブラウン運動モデルを利用してリスク管理を行う。

さらに、CIA レポートにおいては特に次の 3 つの統計的モデル分析を行っている。すなわち、(iv) 非線形時系列モデルの一種である RSLN(局面転換対数正規)モデル、(v)SVLN(確率的ボラティリティ対数正規モデル)、(vi) 安定分布 (stable distribution) モデル、である。ここで、なぜこのような 3 つの統計的モデルをことさら取りあげて検討したか、あるいは検討内容が統計学的に妥当であるかについては定かではない。いずれにしても、こうしたパラメトリック統計モデルを利用することにより、幾何ブラウン運動モデルの推定値を調整 (calibrate) して、ある種のアド・ホックな形でブラウン運動モデルに基づく統計的方法を補正することを推奨しているように解釈することが可能であろう。

CIA レポートで取りあげられた幾何ブラウン運動モデルやその他の 3 つの統計的モデルについては統計学の専門的分野においてはそれぞれ既に様々な統計学的

研究がなされているが、いずれも想定される確率構造が少数の母数（パラメータ）のみに依存するパラメトリック統計モデルという側面を備えている。一般にパラメトリック統計モデルは想定される確率構造が現実をかなり近似している場合には、切れ味のよい結論を与えてくれることが知られている。また、CIA レポートで取りあげている RSLN モデルや SVLN モデルは非線形時系列（non-linear time series）モデルと呼ばれてものの範疇に入るが、非線形時系列モデルの可能性は極めて広汎であることが知られている<sup>2</sup>。

ところで、パラメトリック・モデルを利用するには統計モデルの確率構造がかなり現実的でないときに様々な弊害が生じることが統計学では古くから知られ、様々な議論がなされてきている。CIA レポートが利用しているボラティリティ推定値の調整法は、実は現実の収益率分布に対して想定するパラメトリック・モデルでの仮定に対する疑念と実際的対処と解釈することが可能であろう。例えば、CIA レポートで取りあげている市場価値の幾何ブラウン運動モデルについては市場価値の変動に関する対数正規分布の仮定、あるいは月次収益率についての非時系列構造の仮定、などに関するこれまでに行われてきている多くの実証研究と矛盾していることが知られている<sup>3</sup>。

本稿ではより根本的に CIA レポートが見落としている次の大きな問題を手がかりとして問題を再検討してみよう。CIA レポートでの出発点は手順 (i) において多期間収益率のデータが計測期間が互いに重ならないように選ぶことに特に気にかけて議論を進めている。このことは古典的な統計学ではともかく、近年のノン・パラメトリック統計学の展開を理解すると本質的な問題ではないことが気がつくはずである。もしここで改めて指摘することが保険業界に籍を置く関係者にとっては全く自明でないとする、まずはこうした統計学的問題を指摘しておくことにはなにがしかの意義はあろう。実はこのことを考え直すごく自然に、かなり実用上でも有効な手段を与えてくれるノン・パラメトリック統計学による多期間 VaR 推定の方法が導かれることになるのである。

### 3. 多期間 VaR 推定問題

#### 3.1 問題の設定

多期間収益率の分位点推定の問題を数理的により正確に定式化しよう。時刻  $t$  の資産価格（1次元）を  $S_t$  ( $t = t_0, t_1, \dots, t_T$ ) とする。ここで、もしこの資産保有に伴い配当が存在する場合には配当込みの価格として、以下の議論では配当を明示的に扱わないことにしよう。また、議論の単純化の為に全データ期間を正整数  $m$  と  $n$  により  $T = nm$  となる場合を考察しよう。資産価格から計算される 1 期間対数収益率を  $X_i = \log(S_{t_i}/S_{t_{i-1}})$  ( $i = 1, \dots, nm$ ) とし、次の標準的仮定<sup>4</sup>

<sup>2</sup>統計的時系列解析において知られている既存の非線形時系列モデルの代表例については例えば Tong (1990) や北川 (1993) が説明している。

<sup>3</sup>こうした問題については例えば国友・高橋 (2003) 第 2 章で引用しているように膨大な文献がある。

<sup>4</sup>3 節の多くの議論は条件付期待値  $E[X_i|\mathcal{F}_{t-1}] = \mu_i$  と条件付分散  $Var[X_i|\mathcal{F}_{t-1}] = \sigma_i^2$  とするとき、条件  $n^{-1} \sum_{i=1}^n \mu_i \xrightarrow{P} \mu$ ,  $n^{-1} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$  ( $n \rightarrow \infty$ ) が成り立つ状況まで拡張可能である。ただし、 $\mathcal{F}_{i-1}$  は確率変数列  $\{X_j, j \leq i-1\}$  が生成する最小の  $\sigma$ -集合族である。

を置こう。

仮定 I : 確率変数  $X_i$  ( $i = 1, \dots, nm$ ) は互いに独立で同一の分布  $F(\cdot)$  にしたが  
い、分布関数  $F(\cdot)$  はルベーク測度について絶対連続とする。

ここで  $m$  期間の収益率に対応する分布関数を  $F_m(\cdot)$  として、水準  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ )  
分位点を  $Q_{m,\alpha}$  としよう。すなわち、関係

$$(3.1) \quad F_m(Q_{m,\alpha}) = P(X_1 + \dots + X_m \leq Q_{m,\alpha}) = \alpha$$

が得られる。このことから、 $m$  期間 VaR 推定の問題とは  $F(\cdot)$  が未知の場合に、  
確率  $\alpha$  が与えられた時に真の分位点  $Q_{m,\alpha}$  を推定する問題と見ることができる。  
すなわち、100 $\alpha$ % 分位点 (100  $\alpha$  percentile) は

$$(3.2) \quad Q_{m,\alpha} = F_m^{-1}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbf{R} | F_m(x) \geq \alpha\}$$

により定める。

金融リスク管理の応用上では年率計算に基準化して考える場合が多い。そこ  
で例えばデータの計測期間を月次単位にとれば、比較の為には年率表示で収益率  
を考える必要が生じる。その場合には  $m = 12k$  ( $k = 1, 5, 10$ ) とすれば、

$$(3.3) \quad \begin{aligned} P\left\{\left(\frac{S_{t_m}}{S_{t_0}}\right)^{1/k} \leq Q_{m,\alpha}^*\right\} &= P\left\{\left(\prod_{j=1}^m \frac{S_{t_j}}{S_{t_{j-1}}}\right)^{1/k} \leq Q_{m,\alpha}^*\right\} \\ &= P\left\{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m X_j \leq Q_{m,\alpha}^{**}\right\} \end{aligned}$$

と表現することも可能である。ただし、年率表示の場合の 100 $\alpha$ % 分位点と対数  
収益率データと対応させるには  $Q_{m,\alpha}^{**} = (1/12) \log(Q_{m,\alpha}^*) = (1/m) Q_{m,\alpha}$  と置き直  
す必要があることに注意しておく。

こうした表現から、多期間 VaR における統計的問題とは分布関数  $F(\cdot)$  の  $m$  次た  
たみ込み (convolution) の逆関数についての推定問題であることが分かる。こうし  
た記号を用いると CIA レポートで用いている推定方法を解釈すると

$$(3.4) \quad F_m^{(1)}(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{I}(X_{(k-1)m+1} + \dots + X_{km} \leq x)$$

と置いたときに

$$Q_{m,\alpha}^{(1)} = F_m^{(1)-1}(\alpha)$$

により与えられることがわかる。ただし、関数  $I(\cdot)$  は指標 (indicator) 関数を意味  
している。この方法の基本的難点は  $m$  期間の  $m$  がある程度大きいと推定精度が  
極めて悪く、全く信頼できないことであろう。例えば 10 年の収益率では  $m = 120$   
という極端な場合になるが、 $n = 4$  となり 4 つのデータからの分位点を推定する  
ことになっている。

### 3.2 移動分位点法

前節で説明した多期間 VaR の推定問題について、まずかなり直観的でかつ簡便な移動分位点法を考察しよう。

1 期間収益率  $X_i$  ( $i = 1, \dots, nm$ ) より  $m$  期間収益率を  $Y_i^{(m)} = \sum_{j=1}^m X_{i-1+j}$  ( $i = 1, \dots, (n-1)m+1$ ) と置けば、 $m$  期間収益率の系列が  $(n-1)m+1$  個得られる。そこで、統計量

$$(3.5) \quad F_m^{(2)}(x) = \frac{1}{(n-1)m+1} \sum_{i=1}^{(n-1)m+1} \mathbf{I}(Y_i^{(m)} \leq x)$$

により  $m$  期間収益率の分布関数を推定することが考えられる。分布関数が推定できれば分位点推定量  $Q_{m,\alpha}^{(2)}$  は推定された分布関数  $F_m^{(2)}(\dots)$  の逆関数を用いればよい。

ここで、この推定方法についてのモンテカルロ実験にもとづくシミュレーション結果を次に示しておく。なお、3 節と 4 節のシミュレーションではすべてデータ数 480, シミュレーション数 1,000 とした。

< 表 3.1 >

表 3.1 より仮定 I がほぼ満たされ、かつ期間数  $m$  があまり大きくなければ、この方法による VaR 推定は実用上でもかなりの精度が保証されることが分かる。さらにこの推定方法については次のような数理的正当化が可能である。まず  $m$  を固定して  $n$  が大きくなる場合には次の結果が得られるが、証明の概略は 7 節に与えておく。

定理 3.1 : 仮定 I の下で次のことが成り立つ。

(i) 任意の有限の実数  $x$  について、 $n$  が大きくなるにしたがい

$$(3.6) \quad F_m^{(2)}(x) \xrightarrow{p} F_m(x)$$

かつ  $Q_{m,\alpha}^{(2)}(x) \xrightarrow{p} Q_{m,\alpha}^*(x)$  となる。ただし  $\xrightarrow{p}$  は確率収束を意味する。

(ii)  $n$  が大きくなるにつれて  $\sqrt{nm}(F_m^{(2)}(x) - F_m(x))$  はある連続確率過程  $Z(x)$  に弱収束 (weak convergence) する。ただし、確率変数  $Z(x)$  の期待値は  $E[Z(x)] = 0$ , かつ  $x \leq x'$  に対して共分散は

$$(3.7) \quad E[Z(x)Z(x')] = F(x)[1 - F(x')] + 2 \sum_{k=1}^m [P(Y_1^{(m)} \leq x, Y_k^{(m)} \leq x') - F(x)F(x')]$$

で与えられる。

ここでの数理的結果は具体的な表現形式は少し異なるが、通常の統計的時系列解析 (statistical time series analysis) では同様のことが知られている。さらに、和の項数  $m$  が固定されている限り、確率変数列  $\{X_i\}$  に弱相関 (weak dependent)<sup>5</sup> があっても成立することもわかる。これに対して、和の項数  $m$  がかなり大きい

<sup>5</sup>ここでは 2 次モーメントの存在を仮定して定常時系列  $\{X_i\}$  の自己共分散関数を  $\sigma(k) = E[(X_i - E(X_i))(X_{i+k} - E(X_{i+k}))]$  とすると、条件  $|\sigma(k)| < \rho^k$  ( $0 \leq \rho < 1$ ) を満足するとき弱相関と定義しておく。



ときには統計量の漸近的挙動はより複雑になる。ここでは不変原理 (invariance principle) を適用するために確率変数列について期待値と分散の存在を仮定し、 $E[X_i] = \mu, \text{Var}[X_i] = \sigma^2 (< +\infty)$  としておこう。このとき次の結果が得られるが、証明の概略は7節に与えておく。

定理 3.2 : 確率変数列  $\{X_i\}$  について仮定 I に加えて期待値と分散の存在を仮定する。実数列  $y_m = (x - m\mu)/[\sigma\sqrt{m}]$  に対して  $y_m \rightarrow y$  を仮定する。 $n$  を固定し、 $m$  が大きくなるにつれて  $F_m^{(2)}(m\mu + y_m\sigma\sqrt{m})$  はある確率変数  $H(y)$

$$(3.8) \quad H(y) = \int_{\frac{1}{n}}^1 \mathbf{I}(Z(s) \leq y) ds = 2 \left[ \int_{x \leq y} L(1, x, \omega) dx - \int_{x \leq y} L\left(\frac{1}{n}, x, \omega\right) dx \right]$$

に収束する。ただし、 $Z(s)$  は  $[0, 1]$  上の標準ブラウン運動を  $B(s)$  とすると、 $Z(s) = B(s) - B(s - \frac{1}{n})$  ( $1/n \leq s \leq 1$ ) により定まり、さらに  $L(t, x, \omega)$  は  $Z(s)$  の局所時間 (local time) である。

この (3.8) 式に現れる極限として表現されている確率変数の分布は一般にかなり複雑であるが、この結果より  $m$  が大きくなると観測データ数  $T - 1 = nm$  も同時に大きくはなるが、漸近的にも確率変数の相関構造が消えないことがわかる。すなわち、 $m$  が大きい場合には移動分位点による推定量は一致性 (consistency) を持たないのである。このことを反映した分位点に関するシミュレーション数値例を次に挙げておく。

< 表 3.2 >

## 4. 統計的ブートストラップ VaR 法

### 4.1 ブートストラップ VaR

ここで多期間収益率の分位点についてノン・パラメトリック統計学に基づく推定法を考察しよう。確率分布関数をノンパラメトリック統計的に推定する場合には経験分布関数により推定することが自然である。1 期間収益率データ  $X_i$  ( $i = 1 \cdots, nm$ ) が与えられた時にその収益率に関する経験分布関数 (empirical distribution function) はよく知られているが、多期間収益率については事情が異なり、幾つかの可能性が考えられよう。CIA の方法では総標本数  $T = nm$  を固定した状況では期間数  $m$  が大きくなると  $n$  が小さくなることである。例えば  $T = 480$  であっても、5 年収益率の場合には  $m = 120, n = 4$  と極端に小さくなってしまふことについては既に指摘した。このことから CIA レポートでは様々なパラメトリックな統計的方法を考察しているが、前節と本節の議論から必ずしもパラメトリック・モデルを用いる必要はないことがわかる。

ここで仮定 I の下では明らかに  $X_i$  ( $i = 1, \cdots, nm$ ) は i.i.d. 確率変数列である。このとき任意に確率変数の順序を入れ替えても分布は変化しないことに注目しよう。

与えられた収益率データから可能なすべての組み合わせを用いるとU統計量タイプの推定量

$$(4.1) \quad F_m^*(x) = \frac{1}{\binom{nm}{m}} \sum_{(i_1, \dots, i_m)} \mathbf{I}(X_{i_1} + \dots + X_{i_m} \leq x)$$

が得られる。ところがこの統計量は残念ながら  $m$  が大きくなると天文学的な計算が必要となり、現実的に用いることは可能でない場合が多い。

そこで上の統計量をノン・パラメトリック統計学でよく知られているブートストラップ的方法を利用して実現するリスク管理法を検討しよう。まず  $nm$  個の収益率データを  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_{nm})$ 、データから得られる1期間の経験分布関数 (empirical distribution function) を  $F^{(e)}(x)$  とする。この経験分布から無作為 (ランダム) 抽出により得られるランダム標本  $\mathbf{X}^* = (X_1^*, \dots, X_{mB}^*)$  をブートストラップ標本と呼ぼう。(ただし  $B \geq n$  としておく。) この標本抽出は実際には計算機により復元抽出の操作で行うので

$$(4.2) \quad P^*(X_1^* = X_i) = \frac{1}{nm} \quad (i = 1, \dots, nm)$$

となる。ここで確率測度  $P^*$  は収益率データ  $\mathbf{X}$  が得られた条件付確率により定まるが、ブートストラップ標本  $\mathbf{X}^*$  は経験分布関数  $F^{(e)}(x)$  にしたがっていることが重要である。このブートストラップ標本  $X_j^* (j = 1, \dots, mB)$  より統計量

$$(4.3) \quad F_m^{(3)}(x) = \frac{1}{B} \sum_{(i_1, \dots, i_m)} \mathbf{I}(X_{i_1}^* + \dots + X_{i_m}^* \leq x)$$

を作り、 $m$  期間収益率の分布関数を推定することを考えよう。ここで、 $B$  はブートストラップ標本数とする。こうして求めた分布関数の逆関数により分位点の推定量  $Q_{m,\alpha}^{(3)}$  を構成することができる。なお、この推定方法を統計的靴ひも (ブートストラップ) VaR 推定法と呼ぶことにするが、ノン・パラメトリック統計学において詳しく説明されているエフロン<sup>6</sup>の統計的ブートストラップ (the bootstrap method) 法<sup>6</sup>とは利用の仕方が異なっていることに注意しておこう。

この推定方法についてのブートストラップ回数  $B=1,000$  としたモンテカルロ実験にもとづくシミュレーション結果を次に示しておく。表 4.1 よりほぼ仮定 I を満たしている場合については、ブートストラップ法を利用した推定法は実用上でも十分な精度を保証していることが分かる。

< 表 4.1 >

## 4.2 ブロック・ブートストラップ VaR

<sup>6</sup>統計的ブートストラップ法についての標準的説明は提唱者 B.Efron 教授による解説書 Efron=Tibshirani(1993) を参照されたい。

現代のノン・パラメトリック統計学の標準的議論では統計的ブートストラップ法について数理的正当化の議論が仮定Iの下で与えられている。しかしながら、実際には仮定Iが満たされていないと考えられる状況は少なからず存在していると思われる。特に日々のデータよりもかなり長期の月次以上の収益率については無視することができない自己相関 (autocorrelation) が検出されることが少なくない。仮定Iが満たされない場合においては標準的ブートストラップ法を統計学的に正当化することは困難であることが知られている<sup>7</sup>。そこで次に仮定Iの条件をゆるめて次の条件を置いてみよう。

仮定II：確率変数列  $X_i$  ( $i = 1, \dots, nm$ ) はエルゴード的定常過程 (ergodic stationary process) であり、さらにある実数  $\delta > 0$  がとれて条件 (i)  $E[|X_1|^{2+\delta}] < \infty$ 、および (ii) 混合条件<sup>8</sup>  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k)^{\delta/2(2+\delta)} < \infty$  を満たす弱相関 (weakly dependent) 過程とする。また、確率変数の分布関数  $F(\cdot)$  はルベグ測度について絶対連続とする。

ここで弱相関の定常確率過程にしたがう確率変数列に関する統計的靴ひも (ブートストラップ) 法としては、Künsch (1989) が提案したブロック・ブートストラップ法がノン・パラメトリック統計学ではよく知られていることに注目する。すなわち、ここでブロック・ブートストラップ法を利用する多期間 VaR 推定法を考えることができるのである。

まず収益率データの全体からブートストラップ的にブロック (データ塊) をとることを考え、1ブロック内のデータ数 (ブロックの大きさ) を  $b$  (正整数) とし、 $s = m/b$  も正整数となるようにできるものと想定する。こうしてとったある第  $j$  ブートストラップ・ブロックを  $B_j^* = (X_{j,1}^*, \dots, X_{j,b}^*)$  と置くことにしよう。ここで  $X_{j,i}^*$  は第  $j$  ブロック内の  $i$  番目のブートストラップ・データを意味している。ところで全データからのデータ・ブロックのとり方としては、互いに重ならないデータ・ブロックを選ぶと云う非重複ブロック (non-overlapping block) 法やデータの重なりを許してデータ・ブロックを選ぶと云う移動ブロック (moving block) 法などを考えることができる。ここでは効率性を考慮して移動ブロック法を採用するが、この場合には全データ数  $nm$  からとることのできる総ブロック数は  $N = nm - b + 1$  個となる。1ブロック  $b$  個からなるブートストラップ・データを例えば  $B_{i_1}^* = (X_{i_1,1}^*, \dots, X_{i_1,b}^*)$  とし、さらにブロックを  $s$  個集めて構成した統計量

$$(4.4) \quad F_m^{(4)}(x) = \frac{1}{B} \sum_{(i_1, \dots, i_s)} \mathbf{I}(X_{i_1,1}^* + \dots + X_{i_1,b}^* + \dots + X_{i_s,1}^* + \dots + X_{i_s,b}^* \leq x)$$

により  $m$  期間収益率の分布関数を推定することを考える。ここで、 $B$  はブートストラップ標本数、正整数  $s = m/b$  はブロック数である。

こうして求めた分布関数より分位点推定量  $Q_{m,\alpha}^{(4)}$  を構成する方法をブロック・ブートストラップ VaR 推定法と呼ぶことにしよう。なお、ここで用いたブロック・

<sup>7</sup>このことを最初に指摘したのは Singh (1981) である。

<sup>8</sup>ここで  $\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \{|P(A \cap B) - P(A)P(B)| : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$  とすると、強混合条件 (strong mixing condition) とは  $\alpha(k) = \sup \alpha(\mathcal{F}_1^{j+1}, \mathcal{F}_{i+k+1}^{\infty} : k \in \mathbf{N}) \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ) で与えられる。ここで  $\mathcal{F}_i^j$  は確率変数列  $X_k$  ( $i \leq k \leq j$ ) より生成される最小の  $\sigma$ -集合族である。よく知られた統計的時系列モデルの多くはこの条件を満たしている。

ブートストラップ法のアイデアは Künsch (1989) が導入したブートストラップ法とは利用の仕方が異なることに注意しておく。このブロック・ブートストラップ法による分位点推定については次のような正当化が可能であるが、証明の概略は 7 節で与えておく。

定理 4.1 : 仮定 II の下で次のことが成り立つ。実数列  $y_m = (x - m\mu)/[\sigma\sqrt{m}]$  に対して  $y_m \rightarrow y$  を仮定する。 $m$  が大きくなるにつれてブートストラップ数  $B$ 、ブロック長  $b$ 、ブロック数  $s$  がともに大きくなるものとする。このとき、任意の実数  $x$  に対して  $m$  が大きくなるにしたがい

$$(4.5) \quad |F_m^{(4)}(m\mu + y_m\sqrt{m}) - F_m(m\mu + y_m\sqrt{m})| \xrightarrow{p} 0$$

かつ  $Q_{m,\alpha}^{(4)}(x) - Q_{m,\alpha}^*(x) \xrightarrow{p} 0$  となる。

次にブロック・ブートストラップ (ブロック長は 6 とした) による VaR 推定についてのモンテカルロ実験にもとづくシミュレーション結果を次に示しておく。仮に仮定 I を満たしていないとしても、仮定 II を満たしている限りこの方法による推定は多くの場合には実用上でも十分な精度が保証されることがわかる。

< 表 4.2 >

ここでブロック・ブートストラップ法により推定された分位点  $Q_{m,\alpha}^{(4)}$  の精度についてもノン・パラメトリック統計学で開発されている方法を利用して、一定の仮定の下で推定することが可能であろう。

## 5. カナダと日本のデータ解析例と注意点

我々はカナダの TSE データ (1956.1-1999.12) および日本の代表的株式インデックスである TOPIX(1956.1-2000.1) を用いてデータ解析を行ったので、その概要を報告する。この内、TSE データの解析は CIA レポートが推奨しているリスクに関するガイド・ラインを決める際の重要な役割を果たしたと考えられる。

まず、この間のカナダと日本のマクロ経済事情は相当に異なるが、これらの株価指数データから計算された対数収益率 (月次) について基本統計量を表 5.1 に示しておいた。

< 表 5.1 >

月次データの場合には日次収益率に比べて歪度や尖度の推定値自体は安定していて、一見すると正規分布からはあまり乖離していないように見える。しかしながら、統計解析で標準的手法として知られている Q-Q プロット (図 5.1) を見てみると、分布は正規分布からかなりはずれ、特に左裾部分、つまり通常の VaR で問題となっている分布の重要な部分で特に正規分布からの乖離が大きいと云うことが分かる。したがって、金融リスク管理論においてしばしば言われているように、正規分布に基づくリスク管理法には基本的な問題があることが確認される。

また月次収益率の自己相関を調べてみると、カナダと日本の月次収益率については無視できない相関が検出されている。したがって、このことから通常の互いに独立な確率変数の実現値として、VaR を評価することには大きな問題が生じうることを確認することができた。

次に本稿で議論した幾つかの方法で求めた VaR の推定値を表 5.2 に示しておく。我々の計測結果によると、日本の TOPIX データの場合にはデータ期間の選択によりかなり結果が左右されることがわかる。これはこの間、日本が経験してきたマクロ経済の変動と関係しているが、他方、この間に相対的には安定したマクロ成長を経験してきたカナダについてはデータ期間の選択にはあまり依存しない結果となっていることも注目に値しよう。

< 表 5.2 >

前節までのシミュレーション結果と本節のデータ解析の結果より次のような二つの重要な論点があることに注意しておく。式 (3.3) より明らかなように本稿で求めた分位点は  $Q_{m,\alpha}^*$  であり、これはいわば年平均で求めた分位点であり、その推定精度は統計的にも十分に制御可能である。しかしながら、多期間リスクを長期的 VaR 値そのものと理解すると

$$(5.1) \quad P\left\{\frac{S_{tm}}{S_{t_0}} \leq q_{m,\alpha}\right\}$$

となる  $q_{m,\alpha} = [Q_{m,\alpha}^*]^k$  を推定する必要がある。平均的分位点の推定値より VaR そのものの分位点の推定値を得ることは容易ではあるが、推定精度はかなり悪く、例えば推定量の標準誤差は相当に大きいことになる。

また、変額年金保険の多くの例でより具体的にリスク管理が問題となるのは、変額年金保険の  $m$  期将来のペイオフ関数が確率変数

$$(5.2) \quad X_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m c_i^m \frac{S_{t_i}}{S_{t_0}} e^{-\sum_{j=1}^i r(t_j)}$$

の関数（例えば  $Z_m = \max\{X_m, 0\}$ ）で表現できる場合となっている<sup>9</sup>。ただし、ここで  $c_i^m, S_{t_i}, r(t_i)$  は時刻  $t_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) に発生する（死亡率などに関わる）ペイ・オフ比、株式インデックス価格、リスク・フリー金利をそれぞれ表している。こうした確率変数の VaR 分位点の推定問題は前節までに議論してきた問題よりもより複雑であり、今後の検討課題であろう。

## 6. 結語

本稿では近年の保険業界で重要な話題となっている変額年金保険の統計的リスク管理の方法について考察した。伝統的な 1 期間 VaR 推定にとどまらず多期

<sup>9</sup>例えば Hardy (2003) はこれまで既に開発されている様々な変額年金保険 (Equity-Linked Life Insurance) の例を説明している。

間 VaR 推定を統計的に行う場合には CIA レポートが主張しているようにデータを互いに交わらない期間で計測する必要がないことを指摘した。さらに、統計学的に十分に信頼できる保証がない特定のパラメトリック統計モデルをリスク管理の標準的方法とすることには基本的な問題があることを指摘した。

次に直観的で簡便な移動分位点法と呼ばれる多期間 VaR 計測法に関する統計的性質の分析結果を報告した。この方法は期間数が大きくなれば実用的とも考えられるが、期間数が大きくなると実用的でないことがわかった。

そこでノンパラメトリック統計学で標準的となっている統計的靴ひも（ブートストラップ）法を利用するノンパラメトリック VaR 推定法の適用を検討した。特に移動ブロックを利用したブロック・ブートストラップ法による推定は月次以上の期間の収益率のように自己相関が無視できない場合にも利用できるのも実用に耐えうるような統計的方法であることがわかった。本稿で提案している VaR の統計的計測方法はシミュレーション結果によればその性能は平均的には良好であることがわかったが、長期的 VaR 値のリスク管理そのものの問題点も明らかとなった。

また、本稿で提唱している靴ひも (bootstrap) リスク管理法はかなり簡単な再標本抽出 (リサンプリング) と呼ばれている統計的原理に基づいている。したがって、本稿で想定した仮定 I や仮定 II が妥当する状況よりもより複雑な状況、例えば経済に構造変化が存在する場合 (変化点問題) や死亡率を組み込みたい場合にも、修正して適用することができると考えられる。さらに、変額年金問題では条件付裾期待値 (conditional tail expectation、略して CTE) やより複雑なペイオフ関数を持つ確率変数の分布の推定も重要であるが、例えば分布の裾部分をかなり正確に推定できる為のデータ数がかなり多ければ可能となろう。

最後に本稿の 5 節で報告しているように、実際の収益率データの解析ではデータ期間の選択も重要であることを指摘した。特にこの間の日本はカナダや米国とはかなり異なるマクロ的経済変動を経験している。したがって、カナダや米国の年金保険市場などの金融市場を念頭においた金融リスク管理方法を機械的に日本に適用することには様々な問題がある。特に金融リスク管理が長期的将来まで視野に入れる必要がある場合には、この論点は規制当局にとっても重要と考えられよう。

## 7. 数学付論

この数学付論では前節までに述べた定理の証明の概略を与える。ただし、ここで述べるいずれの証明もノン・パラメトリック統計学ではほぼ標準的な内容を利用したものである。あえて数学的厳密さを追求することなく、概略の説明にとどめたところも少なくない。数理的により正確な議論を展開する為に標準的と思われる統計学分野でよく知られている文献にも言及しておく。

定理 3.1 の証明の概略

[i] 確率変数列  $U_i(x) = \mathbf{I}(Y_i^{(m)} \leq x)$   $i = 1, \dots, (n-1)m+1$  と置こう。仮定 I の下ではこの確率変数列は定常過程であり、期待値は

$$(7.1) \quad E[U_i(x)] = F_m(x)$$

であり、自己共分散関数は  $k \geq m+1$  のとき

$$(7.2) \quad \sigma(k) = \text{Cov}(U_i(x), U_{i+k}(x)) = 0$$

となる。したがって、 $U_i(x)$  は  $m$ -dependent 系列であることがわかる。ここで  $T = (n-1)m+1$  に対して算術平均  $\bar{U}(x) = (1/T) \sum_{i=1}^T U_i(x)$  とすると、Anderson (1971) の定理 8-3-1 より

$$(7.3) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} T \text{var}(\bar{U}(x)) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sigma(k) < +\infty$$

となる。したがって、

$$(7.4) \quad \bar{U}(x) \xrightarrow{p} E[U_1(x)] = F_m(x)$$

となることがわかる。

[ii] 任意の実数  $x$  に対して確率変数列

$$(7.5) \quad Z_T(x) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{i=1}^T [U_i(x) - F_m(x)]$$

と置こう。このとき、確率変数  $Z_T(x)$  の期待値はゼロであって、確率変数  $Z_T(x)$  と  $Z_T(x')$  の自己共分散関数は任意の  $x \leq x'$  に対して

$$(7.6) \quad \begin{aligned} & E[Z_T(x)Z_T(x')] \\ &= \frac{1}{T} \sum_{i,i'=1}^T E[(U_i(x) - F_m(x))(U_{i'}(x') - F_m(x'))] \\ &= \frac{1}{T} \left\{ \sum_{k=1}^T E[(U_k(x) - F_m(x))(U_l(x') - F_m(x'))] \right. \\ & \quad \left. + 2 \sum_{k=1}^{T-1} (T-k) E[(U_1(x) - F_m(x))(U_{1+k}(x') - F_m(x'))] \right\} \\ & \rightarrow F_m(x)[1 - F_m(x')] + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} [P(Y_1^{(m)} \leq x, Y_{1+k}^{(m)} \leq x') - F_m(x)F_m(x')] \end{aligned}$$

となる。ここで最後の式は  $n \rightarrow +\infty$  のとき、 $T \rightarrow +\infty$  となることを利用した。次に確率変数列  $\{Z_T(x)\}$  が tightness 条件を満たしていることを確かめることができる<sup>10</sup>。このところから、 $T \rightarrow +\infty$  のとき確率変数列  $Z_T(x)$  はあるガウス過程  $Z(x)$  に弱収束 (weak convergence) することがわかる。(Q.E.D)

定理 3.2 の証明の概略

確率変数列  $\{X_i\}$  より確率変数列  $\{Y_{i(m)}^{(m)}\}$  を

$$(7.7) \quad \begin{aligned} Y_{i(m)}^{(m)} &= \frac{1}{\sigma\sqrt{mn}} \sum_{j=i(m)}^{i(m)-1+m} (X_j - \mu) \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{mn}} \left\{ \sum_{j=1}^{i(m)-1+m} (X_j - \mu) - \sum_{j=1}^{i(m)-1} (X_j - \mu) \right\} \end{aligned}$$

により構成する。ここで、確率変数列  $\{(1/\sigma)(X_j - \mu)\}$  に対して Donsker の不変原理<sup>11</sup> を用いる。項数について  $n$  を固定し  $m \rightarrow +\infty$  となる系列を想定する。ここで記号  $[x]$  を  $x$  を越えない最大の整数として、 $[0, 1]$  上の任意の実数  $s$  に対して  $i(m) = [(n-1)ms]$  とすると

$$(7.8) \quad \frac{i(m)}{nm} \rightarrow s \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$$

である。さらに、確率変数列の tightness 条件を調べることにより区間  $[0, 1]$  上のブラウン運動  $B(s)$  を用いて

$$(7.9) \quad Y_{i(m)}^{(m)} \xrightarrow{w} B(s + \frac{1}{n}) - B(s) = Z(s)$$

に弱収束することが分かる。次に統計量を分解して

$$(7.10) \quad \begin{aligned} &\frac{1}{(n-1)m+1} \sum_{i=1}^{(n-1)m+1} \mathbf{I}(Y_i^{(m)} \leq y) \\ &= \int_0^{1-\frac{1}{n}} \mathbf{I}(B(s + \frac{1}{n}) - B(s) \leq y) ds \\ &+ \left[ \frac{1}{(n-1)m+1} \sum_{i=1}^{(n-1)m+1} \mathbf{I}(Y_i^{(m)} \leq y) - \frac{1}{(n-1)m+1} \sum_{i=1}^{(n-1)m+1} \mathbf{I}(Z(t_i) \leq y) \right] \\ &+ \left[ \frac{1}{(n-1)m+1} \sum_{i=1}^{(n-1)m+1} \mathbf{I}(Z(t_i) \leq y) - \int_0^{1-\frac{1}{n}} \mathbf{I}(Z(s) \leq y) ds \right] \end{aligned}$$

とする。(ただし時刻  $t_i = i/[nm]$  とした。) このとき右辺の第 2 項と第 3 項をそれぞれ  $B_m$  と  $C_m$  とおこう。それぞれの確率極限を評価すると、 $m \rightarrow +\infty$  のとき

<sup>10</sup>詳細は Billingsley (1968) の第 4 章の議論を参照されたい。

<sup>11</sup>本節では確率変数列の弱収束 (weak convergence) の議論を用いている。これは古典的な中心極限定理の関数空間上への一般化であり、中心極限定理が成立する状況では付加的な tightness 条件が成り立てば確率変数列のブラウン運動への収束が示される。こうした汎中心極限定理の出発点である Donsker の古典的結果については、例えば Billingsley (1968) の 3 節を参照されたい。



ゼロに確率収束する ( $B_m \xrightarrow{p} 0$  かつ  $C_m \xrightarrow{p} 0$ ) ことが分かるので求める結果が得られる。(Q.E.D.)

定理 4.1 の証明の概略

ブートストラップ標本数  $B$  を大きくとると  $mn$  個のデータ  $(x_1, \dots, x_T)$  を所与とした時には

$$(7.11) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{B} \sum_{(i_1, \dots, i_s)} \mathbf{I}(X_{i_1,1}^* + \dots + X_{i_1,b}^* + \dots + X_{i_s,1}^* + \dots + X_{i_s,b}^* \leq x | x_1, \dots, x_T) \\ & \xrightarrow{p} E^*[\mathbf{I}(Y_1^* + \dots + Y_s^* \leq x | x_1, \dots, x_T)] \\ & = P^*(Y_1^* + \dots + Y_s^* \leq x | x_1, \dots, x_T) \end{aligned}$$

となる。ここで、右辺に現れた確率変数列は  $Y_j^* = \sum_{k=1}^b X_{i_j,k}^*$  で定めるが、期待値  $E^*[\cdot]$  は再標本 (リサンプリング) によるブートストラップ標本の意味である。ここで、 $x = m\mu + y\sqrt{m}$  とおき、復元抽出の性質より確率変数列  $Y_j^*$  は互いに独立なので中心極限定理を適用すれば、 $m \rightarrow +\infty$  のとき

$$(7.12) \quad \sup_y |P^*(Y_1^* + \dots + Y_s^* \leq x | x_1, \dots, x_T) - \Phi\left(\frac{y}{\sqrt{\text{Var}(Y_1^*)}}\right)| \rightarrow 0$$

となる。他方、定常確率過程の中心極限定理 (Durrett (1991) の定理 7.8) を  $m \rightarrow \infty$  の時に適用すると

$$(7.12) \quad \sup_y |P(X_1 + \dots + X_m \leq x) - \Phi\left(\frac{y}{\sqrt{\text{Var}(Y_1)}}\right)| \rightarrow 0$$

となる。再び定常確率過程の性質とブートストラップ標本の性質からブロック長が大きいつきには ( $b \rightarrow +\infty$ )

$$(7.13) \quad |\text{Var}(Y_1^*) - \text{Var}(Y_1)| \rightarrow 0$$

である。したがって、任意の実数  $x$  に対して  $x = m\mu + y\sqrt{m}$  とすれば、 $m \rightarrow +\infty$  のときには

$$(7.14) \quad \frac{1}{B} \sum_{(i_1, \dots, i_s)} \mathbf{I}(X_{i_1,1}^* + \dots + X_{i_1,b}^* + \dots + X_{i_s,1}^* + \dots + X_{i_s,b}^* \leq x | x_1, \dots, x_T) - F_m(x) \xrightarrow{p} 0$$

となることがわかる。(Q.E.D.)

## 引用文献

- [1] Anderson, T.W. (1971), *The Statistical Analysis of Time Series*, John-Wiley.
- [2] Billingsley, P. (1968), *Convergence of Probability Measures*, John-Wiley.
- [3] CIA Report (2002), *CIA Task Force on Segregated Fund Investment Guarantees*, Canadian Institute of Actuaries, (<http://www.actuaries.ca> よりダウンロード可能。)
- [4] Durrett, R. (1991), *Probability : Theory and Examples*, Duxbury.
- [5] Efron, B. and Tibshirani, R. (1993), *An Introduction to the Bootstrap*, Chapman and Hall.
- [6] Jorion, J. (2000), *Value at Risk*, 2nd Edition, John-Wiley.
- [7] Hardy, M. (2003), *Investment Guarantees : Modeling and Risk Management for Equity- Linked Life Insurance*, John-Wiley.
- [8] Künsch, H. R. (1989), "The Jackknife and the Bootstrap for General Stationary Observations," *The Annals of Statistics*, Vol. 17-3, 1217-1241.
- [9] 北川源四郎 (1993), 「時系列プログラミング」, 岩波書店。
- [10] 国友直人・高橋明彦 (2003), 「数理ファイナンスの基礎 : マリアバン解析と漸近展開の応用」, 東洋経済新報社。
- [11] Lahiri, S. N. (2003), *Resampling Methods for Dependent Data*, Springer.
- [12] Singh, K. (1981), "On the Asymptotic Efficiency of Efron's bootstrap," *The Annals of Statistics*, 9, 1187-1195.
- [13] Tong, H. (1990), *Non-linear Time Series*, Oxford University Press.

表 3.1(a):移動分位点によるシミュレーション

[注] 年率に換算した分位点 ( (3.3) 式の  $Q_{m,\alpha}^*$  ) の推定値・標準偏差・真値の表を与える。ただし  $\sigma = 0.0451133, \mu = 0.009155$  (正規分布) に設定した。

	1%	2.5%	5%	10%
1年(期間)	0.7812	0.8225	0.8637	0.9117
標準偏差	0.0447	0.0370	0.0326	0.0299
真値	0.7759	0.8217	0.8631	0.9136

表 3.1(b):移動分位点によるシミュレーション

[注] 年率に換算した分位点 ( (3.3) 式の  $Q_{m,\alpha}^*$  ) の推定値・標準偏差・真値の表を与える。ただし、平均と分散が正規分布の場合 (表 3.1(a)) と同様になるように t 分布 (t(3)) を設定した。

	1%	2.5%	5%	10%
1年	0.7598	0.8287	0.8788	0.9325
標準偏差	0.1072	0.0616	0.0430	0.0325
真値	0.7573	0.8244	0.8763	0.9325

図 5.1: TSE と TOPIX 月次対数収益率 QQ プロット

[注] 1956.1 ~ 1999.12 に観察された月次対数収益率データより Q-Q プロットを計算した。

表 3.2(a)：移動分位点によるシミュレーション

[注] 年率に換算した分位点 ( (3.3) 式の  $Q_{m,\alpha}^*$  ) の推定値・標準偏差・真値の表を与える。ただし  $\sigma = 0.0451133$ ,  $\mu = 0.009155$  (正規分布) に設定した。(カッコ内の数値は年率に換算しない分位点である。)

期間	1%	2.5%	5%	10%
5年	0.9789 (0.9133)	0.9901 (0.9659)	1.0045 (1.0369)	1.0245 (1.1417)
標準偏差	0.0392	0.0383	0.0373	0.0352
真値	0.9486 (0.76831)	0.9732 (0.8232)	0.9949 (0.9748)	1.0205 (1.1068)
10年	1.0320 (1.4471)	1.0390 (1.5461)	1.0464 (1.6575)	1.0574 (1.8358)
標準偏差	0.0364	0.0361	0.0360	0.0355
真値	0.9949 (0.9502)	1.0131 (1.1388)	1.0290 (1.3307)	1.0476 (1.5924)

表 3.2(b)：移動分位点によるシミュレーション

[注] 年率に換算した分位点 ( (3.3) 式の  $Q_{m,\alpha}^*$  ) の推定値・標準偏差・真値の表を与える。ただし、平均と分散が正規分布の場合 (表 3.1(a)) と同様になるように t 分布 (t(3)) を設定した。

期間	1%	2.5%	5%	10%
5年	0.9822 (0.9348)	0.9936 (0.9889)	1.0083 (1.0613)	1.0276 (1.1636)
標準偏差	0.0480	0.0467	0.0445	0.0413
真値	0.9466 (0.7599)	0.9757 (0.8845)	0.9991 (0.9953)	1.0258 (1.1358)
10年	1.0350 (1.4911)	1.0415 (1.5853)	1.0488 (1.6957)	1.0591 (1.8674)
標準偏差	0.0373	0.0370	0.0365	0.0363
真値	0.9928 (0.9301)	1.0142 (1.1519)	1.0315 (1.3638)	1.0504 (1.6346)

表 4.1(a) : ブートストラップ法によるシミュレーション

[注] 年率に換算した分位点 ( (3.3) 式の  $Q_{m,\alpha}^*$  ) の推定値・標準偏差・真値の表を与える。ただし  $\sigma = 0.0451133$ ,  $\mu = 0.009155$  (正規分布) に設定した。(カッコ内の数値は年率に換算しない分位点である。)

期間	1%	2.5%	5%	10%
1年	0.7777	0.8227	0.8637	0.9140
標準偏差	0.0224	0.0223	0.0224	0.0228
真値	0.7759	0.8217	0.8631	0.9136
5年	0.9492 (0.7754)	0.9736 (0.8799)	0.9951 (0.9814)	1.0205 (1.1134)
標準偏差	0.0234	0.0237	0.0240	0.0245
真値	0.9486 (0.7683)	0.9732 (0.8732)	0.9949 (0.9748)	1.0205 (1.1068)
10年	0.9953 (0.9799)	1.0132 (1.1704)	1.0289 (1.3650)	1.0476 (1.6328)
標準偏差	0.0242	0.0243	0.0246	0.0249
真値	0.9949 (0.9502)	1.0131 (1.1389)	1.0290 (1.3308)	1.0476 (1.5925)

表 4.1(b) : ブートストラップ法によるシミュレーション

[注] 年率に換算した分位点 ( (3.3) 式の  $Q_{m,\alpha}^*$  ) の推定値・標準偏差・真値の表を与える。ただし、平均と分散が正規分布の場合 (表 3.1(a)) と同様になるように t 分布 (t(3)) を設定した。(カッコ内の数値は年率に換算しない分位点である。)

期間	1%	2.5%	5%	10%
1年	0.7623	0.8232	0.8774	0.9320
標準偏差	0.0830	0.0614	0.0347	0.0275
真値	0.7573	0.8244	0.8763	0.9325
5年	0.9515 (0.7925)	0.9771 (0.9022)	0.9992 (1.0067)	1.0251 (1.1415)
標準偏差	0.0401	0.0364	0.0340	0.0306
真値	0.9466 (0.7599)	0.9757 (0.8845)	0.9991 (0.9953)	1.0258 (1.1358)
10年	0.9982 (1.0298)	1.0167 (1.2277)	1.0325 (1.4264)	1.0509 (1.6957)
標準偏差	0.0346	0.0316	0.0298	0.0285
真値	0.9928 (0.9301)	1.0142 (1.1519)	1.0315 (1.3638)	1.0504 (1.6346)

表 4.1(c): : ブートストラップ法によるシミュレーション

[注] 年率に換算した分位点 ( (3.3) 式の  $Q_{m,\alpha}^*$  ) の推定値・標準偏差・真値の表を与える。ただし  $\alpha = 0.2(AR(1))$ ,  $\sigma = 0.0451133$ ,  $\mu = 0.009155$  (正規分布) に設定した。(カッコ内の数値は年率に換算しない分位点である。)

期間	1%	2.5%	5%	10%
1年	0.7720	0.8177	0.8594	0.9102
標準偏差	0.0263	0.0267	0.0271	0.0280
真値	0.7142	0.7662	0.8140	0.8728
5年	0.9462 (0.7655)	0.9710 (0.8709)	0.9928 (0.9734)	1.0187 (1.1072)
標準偏差	0.0287	0.0293	0.0298	0.0304
真値	0.9115 (0.6292)	0.9410 (0.7380)	0.9672 (0.8365)	0.9983 (0.9915)
10年	0.9930 (0.9716)	1.0113 (1.1648)	1.0273 (1.3630)	1.0463 (1.6362)
標準偏差	0.0299	0.0302	0.0306	0.0310
真値	0.9670 (0.7147)	0.9891 (0.8958)	1.0085 (1.0880)	1.0313 (1.3611)

TSE 1956.1-1999.12 Log Return

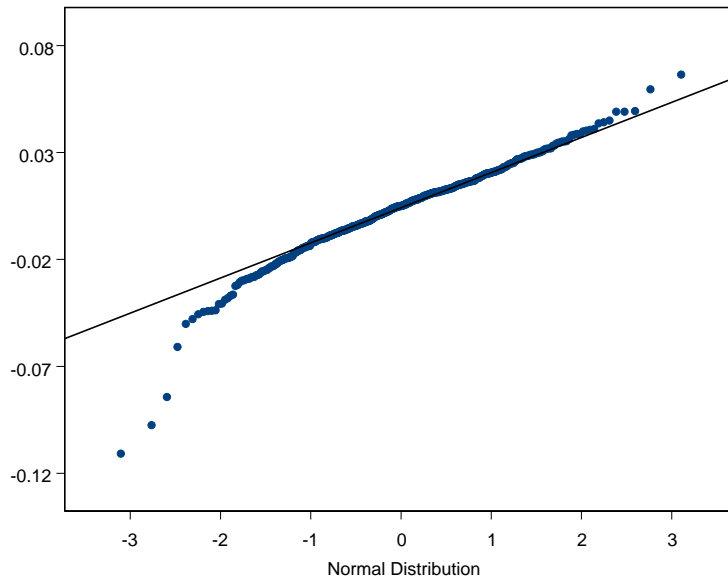


表 4.2: ブロック・ブートストラップ法によるシミュレーション

[注] 年率に換算した分位点 ( (3.3) 式の  $Q_{m,\alpha}^*$  ) の推定値・標準偏差・真値の表を与える。ただし  $\alpha = 0.2(AR(1))$ ,  $\sigma = 0.0451133$ ,  $\mu = 0.009155$  (正規分布) に設定した。(カッコ内の数値は年率に換算しない分位点である。)

期間	1%	2.5%	5%	10%
1年	0.7282	0.7765	0.8221	0.8794
標準偏差	0.0372	0.0341	0.0325	0.0322
真値	0.7142	0.7662	0.8140	0.8728
5年	0.9064 (0.6210)	0.9375 (0.7342)	0.9655 (0.8499)	0.9993 (1.0089)
標準偏差	0.0349	0.0348	0.0347	0.0351
真値	0.9115 (0.6292)	0.9410 (0.7380)	0.9672 (0.8465)	0.9983 (0.9915)
10年	0.9703 (0.7803)	0.9921 (0.9723)	1.0119 (1.1826)	1.0352 (1.4837)
標準偏差	0.0334	0.0334	0.0335	0.0339
真値	0.9670 (0.7146)	0.9891 (0.8958)	1.0085 (1.0879)	1.0313 (1.3611)
20年	1.0130 (1.5846)	1.0290 (2.1569)	1.0428 (2.8032)	1.0592 (3.8193)
標準偏差	0.0330	0.0331	0.0332	0.0335
真値	1.0033 (1.1813)	1.0098 (1.6265)	1.0154 (2.1414)	1.0218 (2.9405)

TOPIX 1956.1-1999.12 Log Return

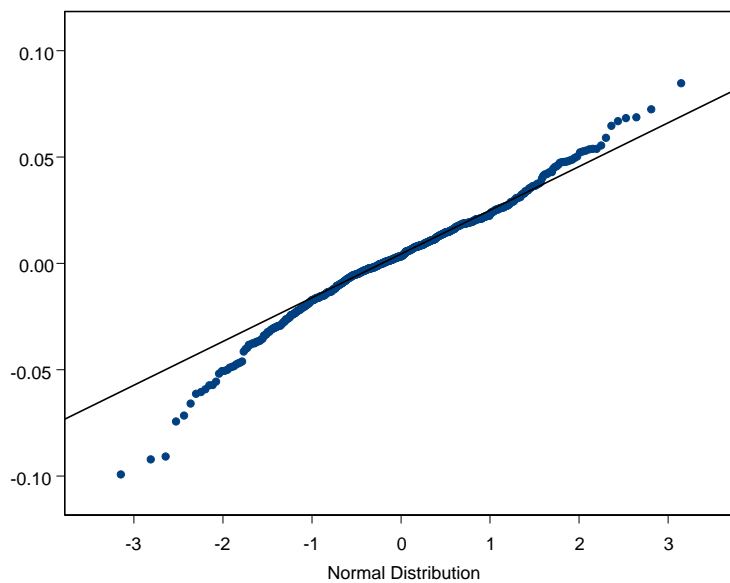


表 5.1:基本統計量

[注] 月次対数収益率データから平均・標準偏差・中央値・歪度・尖度を計算した。

TSE 300

期間	平均	標準偏差	中央値	歪度	尖度
1956.1-1999.12	0.0081	0.0451	0.0115	-0.9073	3.8870
自己相関関数					
(ラグ)	1	2	3	4	5
自己相関	0.0812	-0.0628	0.0425	-0.0306	0.0469
(ラグ)	6	7	8	9	10
自己相関	0.013	-0.0627	-0.0688	0.0469	-0.0262

TOPIX

期間	平均	標準偏差	中央値	歪度	尖度
1956.1-1999.12	0.0072	0.0506	0.0074	-0.4168	1.5160
自己相関関数					
(ラグ)	1	2	3	4	5
自己相関	0.0540	0.0413	0.0077	0.0190	0.0756
(ラグ)	6	7	8	9	10
自己相関	-0.0621	0.0182	0.0152	0.0423	0.0458

TOPIX

期間	平均	標準偏差	中央値	歪度	尖度
1986.1-1999.12	0.0030	0.0626	0.0027	-0.2319	0.7890
自己相関関数					
(ラグ)	1	2	3	4	5
自己相関	0.0488	0.0070	0.0065	0.0523	0.1135
(ラグ)	6	7	8	9	10
自己相関	-0.0883	-0.0592	0.0683	0.0640	0.0703

TOPIX

期間	平均	標準偏差	中央値	歪度	尖度
1989.10-1999.12	-0.0037	0.0646	-0.0047	-0.1850	0.8060
自己相関関数					
(ラグ)	1	2	3	4	5
自己相関	0.0034	-0.0170	0.0066	0.0335	0.0839
(ラグ)	6	7	8	9	10
自己相関	-0.1008	-0.0354	0.0435	0.0360	-0.0115



表 5.2:推定結果

[注] 年率に換算した分位点  $Q_{m,\alpha}^*$  (カッコ内は原分位点) の推定値の表を与える。

TSE:ブートストラップ法

	1%	2.5%	5%	10%
1年	0.7340	0.7905	0.8392	0.8963
5年	0.9251 (0.6776)	0.9516 (0.6803)	0.9748 (0.8802)	1.002 (1.010)
10年	0.9738 (0.7668)	0.9930 (0.9322)	1.009 (1.094)	1.029 (1.331)

TSE:ブロック・ブートストラップ法

	1%	2.5%	5%	10%
1年	0.7160	0.7698	0.8200	0.8802
5年	0.8992 (0.5879)	0.9307 (0.6983)	0.9587 (0.8099)	0.9914 (0.9577)
10年	0.9618 (0.6774)	0.9832 (0.8441)	1.002 (1.020)	1.024 (1.268)

TOPIX:ブートストラップ法

	1%	2.5%	5%	10%
1年	0.7053	0.7581	0.8054	0.8626
5年	0.8969 (0.5804)	0.9243 (0.6746)	0.9485 (0.7677)	0.9770 (0.8902)
10年	0.9480 (0.5863)	0.9682 (0.7239)	0.9857 (0.8659)	1.006 (1.0616)

TOPIX:ブロック・ブートストラップ法

	1%	2.5%	5%	10%
1年	0.6818	0.7350	0.7839	0.8441
5年	0.8637 (0.4806)	0.8963 (0.5785)	0.9254 (0.6787)	0.9594 (0.8128)
10年	0.9308 (0.4882)	0.9534 (0.6205)	0.9734 (0.7637)	0.9969 (0.9694)