

CARF ワーキングペーパー

CARF-J-069

一般化双曲型非対称 t 分布を用いた確率的 ボラティリティ変動モデルの推定と 株価収益率データへの応用

デューク大学統計学部博士課程
中島上智
東京大学大学院経済学研究科
大森裕浩

2010 年 11 月

❁ 現在、CARF は シティグループ、第一生命、日本生命、野村ホールディングス、三井住友銀行、三菱東京 UFJ 銀行、明治安田生命（五十音順）から財政的支援をいただいております。CARF ワーキングペーパーはこの資金によって発行されています。

CARF ワーキングペーパーの多くは
以下のサイトから無料で入手可能です。
http://www.carf.e.u-tokyo.ac.jp/workingpaper/index_j.cgi

このワーキングペーパーは、内部での討論に資するための未定稿の段階にある論文草稿です。著者の承諾無しに引用・複写することは差し控えて下さい。

GH skew Student's t -distribution in stochastic volatility model with application to stock returns

JOUCHI NAKAJIMA* YASUHIRO OMORI†

November 2010

Abstract

This paper represents empirical studies of SV models with a generalized hyperbolic (GH) skew Student's t -error distribution to embed both asymmetric heavy-tailness and leverage effects for financial time series. An efficient Markov chain Monte Carlo estimation method is described and the model is fit to daily S&P500 stock returns. The practical importance of the proposed model is highlighted through the model comparison based on the marginal likelihood, Value at Risk (VaR) and expected shortfall. The empirical results show that incorporating leverage and asymmetric heavy-tailness contributes to the model fit and predicting the expected shortfall.

*Department of Statistical Science, Duke University. E-mail: jouchi.nakajima@stat.duke.edu

†Faculty of Economics, University of Tokyo, Tokyo 113-0033, Japan. E-mail: omori@e.u-tokyo.ac.jp

一般化双曲型非対称 t 分布を用いた確率的 ボラティリティ変動モデルの推定と 株価収益率データへの応用

中島 上智*

大森 裕浩†

2010年11月

概要

株価等の資産価格収益率におけるボラティリティ変動モデルとして、確率的ボラティリティ変動モデルが注目されており、近年、様々な拡張が試みられている。本稿では、収益率分布の左右非対称性に注目し、誤差分布として一般化双曲型非対称 t 分布を仮定すると同時に、収益率の低下が翌日のボラティリティの上昇を引き起こすという非対称性を考慮した確率的ボラティリティ変動モデルを、米国株価指数 S&P500 の日次収益率データにあてはめ、実証分析を行った。モデルの推定法には、マルコフ連鎖モンテカルロ法を用いたベイズ推定法を用い、周辺尤度、バリュー・アット・リスクおよび期待ショートフォールを基準としたモデル比較を行った。その結果、左右非対称な誤差分布を仮定することにより収益率分布の左裾をより正確に表現することができ、周辺尤度や期待ショートフォールの精度を高めることが示された。

*デューク大学統計学部博士課程. E-mail: jouchi.nakajima@stat.duke.edu

†東京大学大学院経済学研究科: 113-0033 東京都文京区本郷 7-3-1. E-mail: omori@e.u-tokyo.ac.jp

1 はじめに

株価や為替レート等の資産価格収益率の時系列データは、2次のモーメントであるボラティリティの変動や、正規分布と比べて裾が厚く左右非対称な収益率分布をもつことが知られている。このような収益率データの分析に対して、確率的ボラティリティ変動 (Stochastic Volatility, SV) モデルが広く用いられており、近年、様々な拡張が試みられている。(例えば, Ghysels *et al.* (2002), Shephard (2005), 渡部 (2000) 等を参照)。特に, SV モデルの誤差分布について, 単純な正規分布の仮定からの拡張として裾の厚い分布がしばしば用いられており, 現実のデータへのあてはまりのよいことが知られている。具体的に, 対称な学生分布の t 分布を用いている例として, Chib *et al.* (2002), Eraker *et al.* (2003), Berg *et al.* (2004), Yu (2005), Omori *et al.* (2007), Nakajima and Omori (2009) 等, 正規逆ガウス (Normal Inverse Gaussian, NIG) 分布を用いている例として, Barndorff-Nielsen (1997), Andersson (2001) 等がある。また, 別の観点から, 連続時間型の SV モデルにジャンプ項を入れることによって裾の厚い分布を表現しようと試みている分析がある。(例えば, Eraker (2004), Chernov *et al.* (2003), Raggi and Bordignon (2006) 等)。

SV モデルにおいては, 左右対称な誤差分布を仮定する例が多いが, 実際の収益率分布は左右対称ではなく, 歪みがあるといわれている。例えば, 株価の収益率分布であれば, 右の裾よりも左の裾の方がより厚いことが知られており, 左右対称な誤差分布を仮定していると, 予測やリスク指標の精度に影響を与える可能性が考えられる。本稿では, この収益率分布の左右非対称性に注目した実証分析を行い, 左右対称な誤差分布を仮定したときに比べて実際のデータへのあてはまり, およびリスク指標の精度にどのように寄与するかを検証する。実際の収益率分布のように, 裾が厚く, かつ左右非対称な収益率分布を表現できる分布として, 一般化双曲型 (Generalized Hyperbolic, GH) 分布がしばしば用いられる。GH 分布は Barndorff-Nielsen (1977) によって導入され, 正規分布や学生分布の t 分布, NIG 分布等を包含する順応性の高い分布族であり, 様々な裾の厚さおよび左右非対称性を表現することができることから, 金融データの分析に用いられてきた (GH 分布の解析的性質について, 増田 (2002) が詳しい)。資産価格収益率の無条件分布に GH 分布の特別な場合として表される分布を用いた例として, 双曲型 (Hyperbolic) 分布 (Eberlein *et al.* (1998)), GH 非対称 t 分布 (Hansen (1994), Fernández and Steel (1998), Aas and Haff (2006)) 等がある。一方, SV モデルの誤差分布にこのような分布を仮定した例として, Silva

et al. (2006), Nakajima and Omori (2010) 等がある。Nakajima and Omori (2010) は、収益率の低下が翌日のボラティリティの上昇を引き起こすという非対称性(レバレッジ効果)を考慮したSVモデルの誤差分布にGH非対称 t 分布を仮定し、マルコフ連鎖モンテカルロ(Markov chain Monte Carlo, MCMC)法を用いたベイズ推定法を提案している。

本稿では、Nakajima and Omori (2010)の方法に基づき、GH非対称 t 分布を誤差分布に持つレバレッジ効果付きSVモデル(以下、“SV with Leverage and SKew- t ”よりSVLSK t モデルと呼ぶ)を、米国株価指数S&P500の日次収益率データにあてはめ、実証分析を行う。通常、ベイズ推定の枠組みでのモデル比較に用いられる周辺尤度だけでなく、本稿では代表的な市場のリスク指標であるバリュー・アット・リスク(Value at Risk, VaR)および期待ショートフォール(Expected Shortfall)を用いたモデルの検討を行う。(これらのリスク指標については、例えば、山井・吉羽(2001)等を参照)。

本稿の以下の構成は次の通りである。まず、第2節でSVLSK t モデルとその推定方法を解説し、次に、第3節でS&P500データにあてはめた場合のパラメータおよび周辺尤度の推定結果を紹介するほか、市場のリスク指標であるVaRおよび期待ショートフォールを用いた分析結果を基にモデルの比較、検討を行う。最後に第4節で今後の課題について述べ、補論にGH分布に関する性質と推定アルゴリズムの詳細部分をまとめる。

2 SVLSK t モデルのベイズ推定

2.1 SVLSK t モデル

通常用いられる簡単なSVモデルは、次の3式から構成される。

$$y_t = \varepsilon_t \exp(h_t/2), \quad t = 1, \dots, n, \quad (1)$$

$$h_{t+1} = \mu + \phi(h_t - \mu) + \eta_t, \quad t = 0, \dots, n-1, \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \sim N(0, \Sigma), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho\sigma \\ \rho\sigma & \sigma^2 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

ここで、 y_t は資産価格の収益率から平均を除去したもの、 h_t はボラティリティの変動を表す潜在変数である。式 (2) は、この潜在変数 h_t が次数 1 の自己回帰モデル (AR(1) モデル) に従うものと定式化している。本稿ではこの系列が定常的である考え、 $|\phi| < 1$ と仮定する。また、その初期値である h_1 については、系列の定常分布に従っているものとして、 $h_0 = \mu$ 、 $\eta_0 \sim N(0, \sigma^2/(1 - \phi^2))$ と仮定する。2 つの誤差項である ε_t および η_t は、式 (3) において二変量正規分布に従っており、 ρ は相関係数を表す。株式市場では株価が上がった日の翌日よりも下がった日の翌日の方がボラティリティの上昇が起こりやすいことが知られており、ボラティリティの非対称性 (asymmetry) 或いはレバレッジ効果 (leverage effect) と呼ばれている (Black (1976), Nelson (1991))。SV モデルでは、2 つの誤差項の相関係数 ρ の値が負 ($\rho < 0$) のとき、このような株式市場で観測される非対称性と整合的である (Yu (2005), Omori *et al.* (2007))。

さて、左右非対称かつ裾の厚い誤差分布を考えるために、GH 分布に従う確率変数を導入する。GH 分布は一般に、次の正規尺度平均混合 (normal variance-mean mixture) で定義される。

$$w_t = \mu_w + \beta z_t + \sqrt{z_t} \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, 1), \quad z_t \sim GIG(\lambda, \delta, \gamma). \quad (4)$$

ここで、 GIG は一般化逆ガウス (Generalized Inverse Gaussian) 分布を表す。 ε_t は標準正規分布、 z_t は GIG 分布にそれぞれ従う確率変数であり、その正規尺度平均混合で表される確率変数 w_t は GH 分布に従う。この GH 分布は、正規分布や学生 t 分布、 NIG 分布等を包含する順応性の高い分布族であり、4 つのパラメータを操作することによって様々な裾の厚さおよび左右非対称性を表現することができる。(GH 分布の密度関数は補論 A を、また詳しい解析的性質は増田 (2002) を参照されたい)。

SV モデルの誤差分布として GH 分布を直接適用することは可能であるが、いくつかの先行研究において、GH 分布はその尤度関数がフラットになりやすいためパラメータの推定がしばしば難しいと議論されている。(例えば、Prause (1999), Aas and Haff (2006), Nakajima and Omori (2010) 等を参照されたい)。Aas and Haff (2006) は、GH 分布のパラメータのうちいくつかは識別が難しく、最尤推定をする際に局地解がいくつも存在する可能性がある、と述べている。また、SV モデルでは 2 次のモーメントであるボラティリティが AR(1) 過程に従っており、既に順応性の高いモデル

となっているため GH 分布をそのまま適応することは難しいと考えられる。そこで、本稿では Nakajima and Omori (2010) に従って、GH 分布の特別な場合である、GH 非対称 t 分布を、SV モデルの誤差分布として導入する。式 (4) において、 $\lambda = -\nu/2$ ($\nu > 0$)、 $\delta = \sqrt{\nu}$ 、 $\gamma = 0$ と制約をおくと、次の式で定義される確率変数 w_t は GH 非対称 t 分布に従う。

$$w_t = \mu_w + \beta z_t + \sqrt{z_t} \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, 1), \quad z_t \sim IG(\nu/2, \nu/2). \quad (5)$$

ここで、 IG は逆ガンマ (Inverse Gamma) 分布を表し、 $GIG(-\nu/2, \sqrt{\nu}, 0)$ と $IG(\nu/2, \nu/2)$ が等しい分布であることから導かれる。さらに、SV モデルに導入する際に $E(w_t) = 0$ と仮定するため、 $\mu_w = -\beta\mu_z$ とおく。ただし、 $\mu_z \equiv E(z_t) = \nu/(\nu - 2)$ である。また、 w_t の分散が有限であると仮定するため、 $\nu > 4$ とする。

この GH 非対称 t 分布は、GH 分布の特別な場合であるものの、2 つのパラメータ (β, ν) によって、左右非対称かつ裾の厚い分布を表現できる分布であり、先行研究でもしばしば用いられている。(例えば、Prause (1999), Jones and Faddy (2003), Aas and Haff (2006) 等)。パラメータと左右非対称や裾の厚さの関係をみるために、いくつかのパラメータの値を用いて GH 非対称 t 分布の密度関数を描いたものが図 1 である。図 1(i) は $\nu = 10$ を固定し、 $\beta = 0, -1, -2$ と値を変えた場合の GH 非対称 t 分布である。 $\beta = 0$ の場合は通常使われている (左右対称な) スチューデントの t に一致する。 β の値が負の場合、その絶対値が大きくなるにつれて、分布の歪みが大きくなる。また、同時に裾の厚さも大きくなっている点が興味深い。一方、図 1(ii) は $\beta = -2$ を固定し、 $\nu = 15, 10, 5$ と値を変えた場合の GH 非対称 t 分布である。 ν の値が小さくなるほど、裾の厚さが大きくなるほか、歪み具合も大きくなっている。スチューデントの t で用いられる自由度との対応から、 ν は裾の厚さ、 β は左右の非対称性、或いは歪度をそれぞれ表すパラメータとして理解できるが、上の例で見たように左右の非対称性および裾の厚さはこれら 2 つのパラメータの値の組によって決まることを留意しておく必要がある。(なお、GH 非対称 t 分布の 4 次までのモーメントは補論 A を参照されたい)。

基本の SV モデルにおける式 (3) の ε_t は正規分布に従うと仮定されているが、この項を GH 非対称 t 分布に従う確率変数で置き換えることにより、次の式で表される

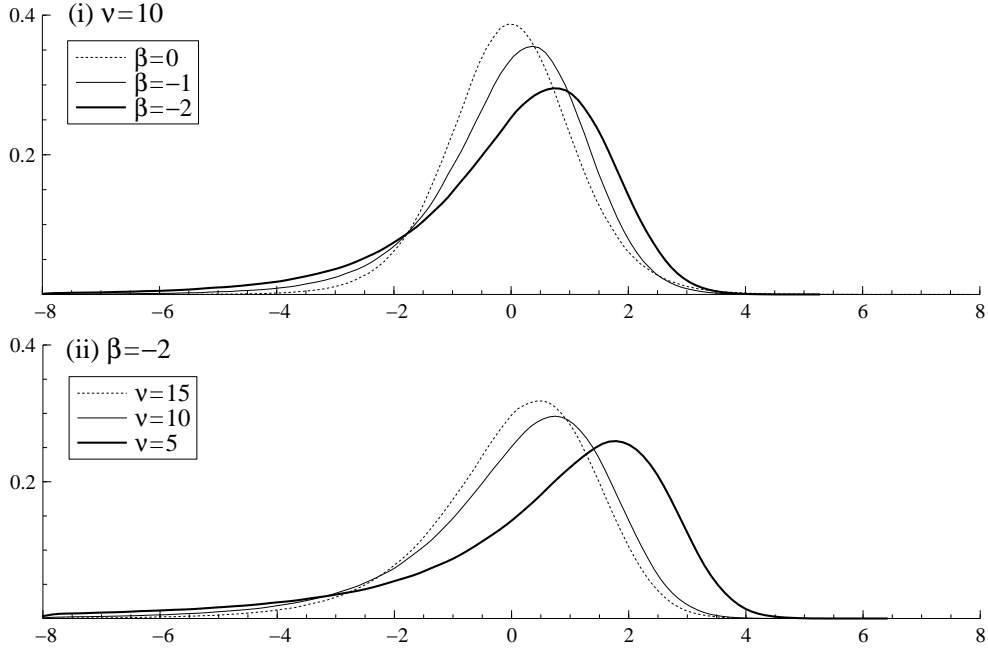


図 1: GH 非対称 t 分布の密度関数の例. (i) $\nu = 10$ を固定し, $\beta = 0, -1, -2$ の場合. (ii) $\beta = -2$ を固定し $\nu = 15, 10, 5$ の場合.

SV モデルを得る.

$$y_t = \{\beta(z_t - \mu_z) + \sqrt{z_t}\varepsilon_t\} \exp(h_t/2), \quad t = 1, \dots, n, \quad (6)$$

$$h_{t+1} = \mu + \phi(h_t - \mu) + \eta_t, \quad t = 0, \dots, n-1, \quad (7)$$

$$z_t \sim IG(\nu/2, \nu/2). \quad (8)$$

ただし, 2つの誤差項 (ε_t, η_t) は式 (3) に従う. 本稿では, このモデルを SVLSKt モデルと呼ぶ. $\beta \equiv 0$ の場合, (左右対称な) スチューデントの t を誤差分布とする SV モデル (以下, SVLt モデルと呼ぶ) となる. SVLt モデルを詳しく分析している例として, Chib *et al.* (2002), Eraker *et al.* (2003), Yu (2005), Omori *et al.* (2007) 等がある.

SVLSKt モデルの仮定に関して, 2つの留意点を述べる. 1つ目は, 非対称 t 分布には本稿で扱っている GH 非対称 t 分布以外に様々な定義がある. (例えば, Hansen (1994), Fernández and Steel (1998), Prause (1999), Jones and Faddy (2003), Azzalini and Capitanio (2003) 等を参照). その中で GH 非対称 t 分布を SV モデルに導入した理由は, 次項や補論 B でみるように MCMC 法を用いたベイズ推定を行う際, GH 非対

称 t 分布が 2 つの確率変数によって正規尺度平均混合で表されることがアルゴリズムの単純化につながるからである。2 つ目の留意点は, z_t の分布について式 (5) における仮定からパラメータを増やして, 例えば $z_t \sim IG(\nu/2, \delta^2/2)$ と拡張することも可能であり, この仮定は Aas and Haff (2006) で提案されているモデルに相当する。ところが, Nakajima and Omori (2010) は, この仮定を基にした SV モデルをシミュレーションデータおよび実際の株価収益率データで推計したところ, ν と δ の事後相関が 0.99 とほぼ 1 に近い値になってしまうということを報告している。そこで, 本稿では Nakajima and Omori (2010) に従い, 式 (5) で定義される GH 非対称 t 分布を導入した SV モデルを中心として扱うこととする。なお, Aas and Haff (2006) のモデルについては, 3.3 節におけるモデル比較で扱う。

2.2 事後分布とマルコフ連鎖モンテカルロ法

SV モデルの推定ではボラティリティ等, 潜在変数の個数が非常に多く, 最尤法による推定が困難な場合が多い。このため, 多くの先行研究でベイズ推定法の枠組みにおける MCMC 法を用いて, モデルの事後分布からパラメータの確率標本を乱数発生させることにより, 得られた標本を基に統計的推測を行っている。(MCMC について詳しくは, Koop (2003), Gamerman and Lopes (2006), 大森 (2001), 中妻 (2003), 伊庭他 (2001), 和合 (2005) 等を参照)。

まず, $\theta = (\phi, \sigma, \rho, \mu, \beta, \nu)$, $y = \{y_t\}_{t=1}^n$, $h = \{h_t\}_{t=1}^n$, $z = \{z_t\}_{t=1}^n$ とそれぞれ定義し, $\pi(\theta)$ を θ の事前確率密度関数とする。データ y が得られたとき, SVLSKt モデルにおける (θ, h, z) の同時事後確率密度関数は, 次の式で表される。

$$\begin{aligned} \pi(\theta, h, z|y) &\propto \pi(\theta) \times \prod_{t=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{z_t}e^{h_t/2}} \exp\left\{-\frac{(y_t - \beta\bar{z}_te^{h_t/2})^2}{2z_te^{h_t}}\right\} \\ &\times \prod_{t=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{(\bar{h}_{t+1} - \phi\bar{h}_t - \bar{y}_t)^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right\} \\ &\times \frac{\sqrt{1-\phi^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(1-\phi^2)\bar{h}_1^2}{2\sigma^2}\right\} \times \prod_{t=1}^n \frac{(\nu/2)^{\nu/2}}{\Gamma(\nu/2)} z_t^{-(\nu/2+1)} \exp\left(-\frac{\nu}{2z_t}\right). \end{aligned}$$

ただし, $\bar{h}_t = h_t - \mu$, $\bar{z}_t = z_t - \mu_z$, $\bar{y}_t = \rho\sigma(y_t - \beta\bar{z}_te^{h_t/2})e^{-h_t/2}/\sqrt{z_t}$ である。MCMC 法によるこの事後分布のサンプリングを以下のステップで行う。

1. θ, h, z の初期値を設定する.
2. $\phi | \sigma, \rho, \mu, \beta, \nu, h, z, y$ からサンプリングする.
3. $(\sigma, \rho) | \phi, \mu, \beta, \nu, h, z, y$ からサンプリングする.
4. $\mu | \phi, \sigma, \rho, \beta, \nu, h, z, y$ からサンプリングする.
5. $\beta | \phi, \sigma, \rho, \mu, \nu, h, z, y$ からサンプリングする.
6. $\nu | \phi, \sigma, \rho, \mu, \beta, h, z, y$ からサンプリングする.
7. $z | \theta, h, y$ からサンプリングする.
8. $h | \theta, z, y$ からサンプリングする.
9. 2に戻る.

ここでは、GH 非対称 t 分布を構成している潜在変数 z を含めた事後分布をサンプリングしている。ステップ7では、 z をその条件付事後確率密度関数から発生させている一方、それ以外のステップでは z を条件付けて確率標本を発生させている。 z を条件付けることによって、各ステップの条件付事後確率密度関数が簡単になると同時に、サンプリングの効率性も高めていると考えられる。一方、ステップ8においてボラティリティを表す潜在変数 h をサンプリングしているが、SV モデルにおけるボラティリティの事後分布からのサンプリング法としては、主に single-move sampler, multi-move sampler, mixture sampler の3つがしばしば使われている。multi-move sampler は Shephard and Pitt (1997) および Watanabe and Omori (2004), Omori and Watanabe (2008) によって、mixture sampler は Kim *et al.* (1998) および Omori *et al.* (2007) によってそれぞれ提案された方法で、single-move sampler よりも効率的であることが知られている。(詳しくは、渡部 (2000), 大森・渡部 (2008) 等を参照されたい)。本稿では、Nakajima and Omori (2010) に倣って、SVLSKt モデルの推定に multi-move sampler を用いることにする。各サンプリングの詳細については、補論Bを参照されたい。

2.3 周辺尤度と予測分布

本稿では, SVLSKt モデルを従来の SVt モデルと比較してあてはまりがよいかどうかを検討するため, ベイズ推定法の枠組みでしばしば用いられている周辺尤度 (marginal likelihood) を基準の 1 つとしてモデル選択を行う. 周辺尤度は, データを得たときのモデルの周辺確率密度関数の実現値であり, そのモデルからデータが観測されるもっともらしさを計測する尺度である. 周辺尤度を推定する方法には様々なものがあるが (例えば, 大森 (2001), 伊庭他 (2001) 等を参照), 以下では恒等式に基づく方法を用いる. 任意のパラメータ Θ に対して, 周辺尤度を $m(y)$ とおくと, 次の恒等式が満たされる.

$$\log m(y) = \log f(y|\Theta) + \log \pi(\Theta) - \log \pi(\Theta|y). \quad (9)$$

ただし, $f(y|\Theta)$ は尤度関数, $\pi(\Theta)$ は事前確率密度関数, $\pi(\Theta|y)$ は事後確率密度関数である. この恒等式を用いて, 周辺尤度 $m(y)$ を推定することができる. SV モデルの尤度関数は解析的に計算することが難しいため, 本稿ではモンテカルロ法に基づく粒子フィルタ (particle filter) を用いる. 特に, 本稿では Pitt and Shephard (1999) によって提案された補助粒子フィルタ (auxiliary particle filter) を適用する. (例えば, Chib *et al.* (2002), Omori *et al.* (2007) 等を参照). 一方, 事後確率密度関数は Chib (1995) および Chib and Jeliazkov (2001) で提案された MCMC 法のアルゴリズムを利用する推定法を用いる. なお, 式 (9) は Θ の値に依存しないが, 実際の計算においては事後確率密度関数の推定値が安定的になるように事後平均を用いることが多い.

本稿では, 周辺尤度によるモデル比較に加えて, 予測分布に基づいた VaR および期待ショートフォールによるモデルの比較, 検討を行う. ここでは n 期までのデータ (y_1, \dots, y_n) が得られたときの 1 期先予測, つまり $n+1$ 期の収益率 y_{n+1} の予測を考える. y_{n+1} を潜在変数とすると, 事後確率密度関数は次のように表せる.

$$\pi(y_{n+1}|y) \propto \iiint f(y_{n+1}|\theta, h, z, y)\pi(\theta, h, z|y)d\theta dh dz. \quad (10)$$

上で提案された MCMC 法のアルゴリズムに次のステップを加えることによって, y_{n+1} の予測分布に基づく確率標本を得ることができる.

- (i) $h_{n+1}|\theta, h_n, z_n, y_n$ からサンプリングする.

(ii) $z_{n+1} | \nu$ からサンプリングする.

(iii) $y_{n+1} | \theta, h_{n+1}, z_{n+1}$ からサンプリングする.

具体的なサンプリング方法は補論 B を参照されたい.

3 S&P500 の日次収益率の実証分析

3.1 データ

本節では, 米国の株価指数 S&P500(スタンダード・プアーズ 500 種) の日次収益率を用いた実証分析を行う. 終値を P_t として対数階差を $y_t = \log P_t - \log P_{t-1}$ と計算したものを収益率 y_t とする. パラメータおよび周辺尤度の推定に使用した期間は 1996 年 1 月 2 日から 2001 年 10 月 1 日までの 1,500 営業日である. 時系列データは図 2 に描かれており, 要約統計量は表 1 にまとめられている. 歪度は -0.2726 と負であり, 尖度は 6.3514 と, 正規分布の 3 より大きい. なお, 推計には収益率 y_t からそのサンプル平均を引いたものを用いた.

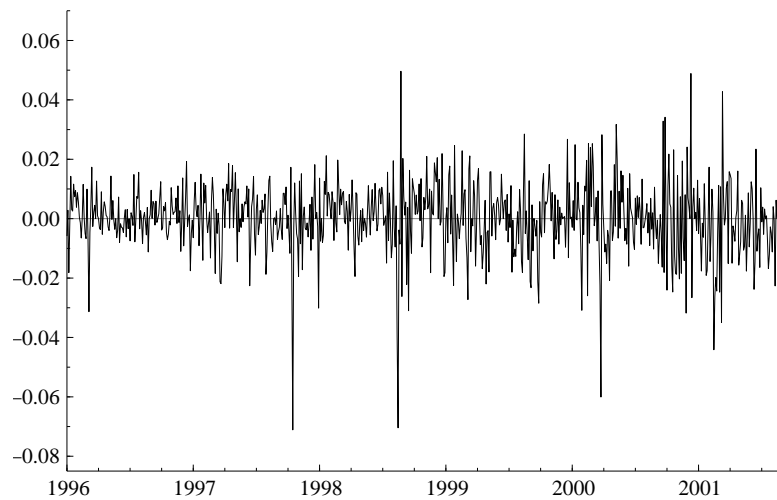


図 2: S&P500 の日次収益率の時系列データ (1996/1/2 - 2001/10/1).

観測回数	平均	標準偏差	歪度	尖度	最小値	最大値
1,500	0.0003	0.0118	-0.2726	6.3514	-0.0711	0.0499

表 1: S&P500 の日次収益率の要約統計量 (1996/1/2 – 2001/10/1).

3.2 パラメータおよび周辺尤度の推計結果

S&P500 の日次収益率データを用いて SVLSKt モデルを推計する。推計にあたって、パラメータの事前分布を以下のように設定した。

$$\begin{aligned} \frac{\phi + 1}{2} &\sim \text{Beta}(20, 1.5), & \sigma^{-2} &\sim \text{Gamma}(2.5, 0.025), & \rho &\sim U(-1, 1), \\ \mu &\sim N(-10, 1), & \beta &\sim N(0, 1), & \nu &\sim \text{Gamma}(16, 0.8) I(\nu > 4). \end{aligned}$$

ただし、 $I(\cdot)$ は指示関数である。いずれの事前分布も先行研究の結果と整合的な値に設定されている。 $(\phi + 1)/2$ におけるベータ分布の平均と標準偏差は (0.86, 0.11)、 σ^{-2} におけるガンマ分布の平均と標準偏差は (100, 63.2) である。 ν について、 $\nu > 4$ の制約を考慮しない場合のガンマ分布の平均と標準偏差は (20, 5) である。

MCMC 法による推定においては、稼動検査期間 (burn-in period) として最初の 2,000 個を捨てた後、20,000 個のサンプルを発生させた。本稿における数値計算は全て行列言語 Ox 5.0 (Doornik (2006)) を用いている。図 3 は推定によって得られた標本自己相関関数、標本経路、事後確率密度関数である。標本自己相関関数はいずれのパラメータについても十分に減衰して定常分布への収束が早く、また標本経路も状態空間を万遍なく十分に訪れている。なお、サンプリングのいくつかのステップで、独立連鎖の Metropolis-Hasting (MH) アルゴリズムを用いているが、その MH アルゴリズムの採択確率はそれぞれ、 ϕ が 96.4%、 (σ, ρ) が 96.5%、 ν が 98.7%、 z が 85.9%、また h の multi-move sampler は AR ステップが 87.8%、MH ステップが 85.5%と、いずれも高い採択確率であった。

表 2 は推定された事後平均、事後標準偏差、95%信用区間、非効率性因子 (inefficiency factor) である。SVLSKt モデルに加えて、SVLt モデルの推定結果も掲載している。非効率性因子は無相関の標本から計算する標本平均と同じ分散を得るために何倍の

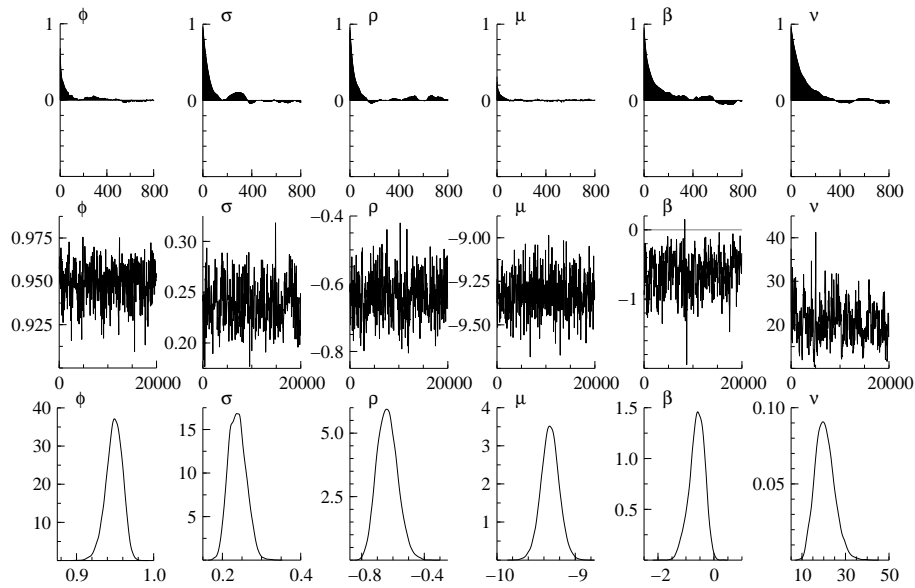


図 3: S&P500 の日次収益率を用いた SVLSKt モデルの推計結果. 標本自己相関関数 (上段), 標本経路 (中段), 事後確率密度関数 (下段).

サンプル数が必要であるかを表す効率性の尺度である. (例えば, 伊庭他 (2001) を参照). 非効率性因子の値はあまり小さくなく, 最も大きい ν であっても SVLSKt モデルで 150 前後と先行研究と整合的である. パラメータの推定値をみると, ϕ の事後平均はどちらのモデルも 0.9 以上と 1 に近く, ボラティリティの持続性が現れているほか, ρ の事後平均はどちらのモデルでも -0.5 から -0.6 前後と, 非対称性・レバレッジ効果の存在を示唆している. SVLSKt モデルにおける β の事後平均は -0.6098 と負であり, 95%信用区間は $[-1.2086, -0.1334]$ とゼロを含んでいないことから, 用いた日次収益率データには誤差分布の左右非対称性が存在すると考えられる. ν の事後平均は 20 前後となっており, 正規分布よりも裾の厚い誤差分布を捉えていると考えられる. 2つのモデルの間で ν の推定値にほとんど違いがないが, SVLSKt モデルでは β がゼロから離れた負の値を取っているため, 2.1 節でみたように SVLt モデルで推定された誤差分布よりも裾の厚い分布を捉えているといえる.

表 2 ではまた, 推定された周辺尤度およびその標準誤差も掲載されている. 標準誤差は, 尤度関数部分と事後確率密度関数部分に分けて算出したものを合算しており, 尤度関数部分に関しては 10 回の補助粒子フィルタの推定を基に, また事後確率密度関数部分は Chib (1995) および Chib and Jeliazkov (2001) の方法を基にしてい

パラメータ	SVLt	SVLSKt
ϕ	0.9171 (0.0167) [0.8808, 0.9459] 31.3	0.9487 (0.0108) [0.9256, 0.9678] 44.9
σ	0.3123 (0.0277) [0.2646, 0.3709] 77.0	0.2382 (0.0222) [0.1989, 0.2830] 97.8
ρ	-0.5266 (0.0626) [-0.6404, -0.3962] 37.5	-0.6358 (0.0649) [-0.7530, -0.5013] 70.7
μ	-9.2559 (0.0991) [-9.4487, -9.0565] 13.7	-9.3219 (0.1156) [-9.5504, -9.0933] 13.2
β		-0.6098 (0.2754) [-1.2086, -0.1334] 124.4
ν	20.089 (4.6331) [12.593, 30.838] 155.8	20.539 (4.4072) [12.843, 29.971] 156.0
対数周辺尤度	4668.11 (0.48)	4676.82 (0.56)

表 2: S&P500 の日次収益率を用いた推計結果. 1 行目: 事後平均および標準偏差, 2 行目: 95%信用区間, 3 行目: 非効率性因子. 対数周辺尤度のカッコ内は推定された標準誤差.

る. SVLSKt モデルの周辺尤度は SVLt モデルよりも大きく, 用いた日次収益率データに対しては SVLSKt モデルの方があてはまりが優れているモデルであると考えられる. Nakajima and Omori (2010) では, S&P500 データのほかに TOPIX(東証株価指数) の様々な期間の日次収益率を用いた周辺尤度によるモデル比較を行っており, いずれの場合においても, SVLSKt モデルの方が SVLt モデルよりもあてはまりがよいということが報告されている.

3.3 VaR と期待ショートフォールの推定結果

本節では, VaR および期待ショートフォールを推定することにより, SVLSKt モデルの検討を行う. VaR および期待ショートフォールは, 特に金融実務の観点から注目されており, ボラティリティ変動モデルにおける研究でもしばしば用いられている. (例えば, Eberlein *et al.* (1998), Aas and Haff (2006), 山井・吉羽 (2001), 渡

部・佐々木 (2006) を参照されたい). VaR は, 一般的に, 保有している危険資産において一定の確率で保有期間中に発生し得る最大損失額と定義され, 例えば, 水準 α の VaR は予測される損益額分布の下側 100α 分位点 (quantile) として定義される. 一方, 期待ショートフォールは, conditional VaR, mean excess loss 等とも呼ばれ, 損失額が VaR 以上となることを条件とした場合の損失額の条件付期待値である. VaR は損失額分布の分位点のみを計測するため, その分位点より先の裾の情報を捉えられないという批判があるが, 期待ショートフォールは分位点より先の裾部分に限定した損失額の期待値を計測するため, VaR よりも分布の裾を評価する指標として優れているといわれている. 本稿では, Aas and Haff (2006) で用いられている VaR と期待ショートフォールの算出方法に倣って分析を行う.

前節では 1996 年 1 月 2 日から 2001 年 10 月 1 日までの S&P500 の日次収益率データ (観測個数は 1,500 個) を用いたが, これに加えて 2005 年 8 月 22 日までの 1,000 個の観測値を加えて, 計 2,500 個の観測値で分析を行う. まず, 最初の 1,500 個の観測値を用いてモデルを推定し, 1 期先の予測分布を算出する. この予測分布における VaR および期待ショートフォールと実際の値 (1,501 個目の観測値) を比較する. 次に観測値を 1 つずつずらして, 2 個目から 1,501 個目までのデータを用いて予測分布を算出し, 1,502 個目の実際の値と比較する. このようにして, 予測分布と実際の値との比較を 1,000 個得るまで繰り返す. この計算負荷は膨大であるが, VaR や期待ショートフォールによる評価は稀な事象を対象としているためにサンプル期間によって結果が大きく変わりやすい. そこで本稿では約 4 年に亘る予測対象期間を用意しモデルの評価を試みた.

モデル比較の候補として, SVLSKt モデルを含めた次の 7 つのモデルを考える.

- SV モデル: レバレッジ効果がなく ($\rho = 0$), 誤差が正規分布に従うモデル
- SVL モデル: レバレッジ効果を考慮し, 誤差が正規分布に従うモデル
- SVt モデル: レバレッジ効果がなく, 誤差が対称な t 分布に従うモデル
- SVLt モデル: レバレッジ効果を考慮し, 誤差が対称な t 分布に従うモデル
- SVSKt モデル: レバレッジ効果がなく, 誤差が GH 非対称 t 分布に従うモデル
- SVLSKt モデル: レバレッジ効果を考慮し, 誤差が GH 非対称 t 分布に従うモデル

- SVLAHt モデル: レバレッジ効果を考慮し, Aas and Haff (2006) で提案されている, 誤差が $z_t \sim IG(\nu/2, \delta^2/2)$ と仮定した場合の GH 非対称 t 分布に従うモデル

レバレッジ効果の有無, および誤差分布の仮定によって VaR や期待ショートフォールの精度がどのように影響されるかを考察するのが本節の目的である.

まず, $\alpha = 0.005, 0.01, 0.05$ とおいて, 分位点 $100(1 - \alpha)\%$ の VaR を予測する. 株価収益率におけるリスク分析を考えているため, ここでは分析の対象を分布の左の裾に限定している. それぞれのモデルにおいて, データ期間から 1 期先の事後予測分布における分位点を推定する. 具体的には MCMC 法によるサンプリングの各回に, 2.3 節の方法を用いて 1 期先の予測分布からの確率標本をサンプリングし, 最終的に得られた確率標本の全体の $100\alpha\%$ 分位点を VaR の予測値とする. SVLAHt モデルに関しては, 追加の事前分布として, $\delta \sim IG(4, 0.4)$ とする.

このようにして得られた予測値が実際の観測値と比較して妥当かどうかを, Kupiec (1995) の尤度比検定を用いて検証する. 推定された VaR を $\widehat{VaR}_t(\alpha)$ (ここでは負の値), 1 期先の実際の収益率がこの VaR を下回る, すなわち $y_t < \widehat{VaR}_t(\alpha)$ となる回数を $n_\kappa(\alpha)$ とおく. N 期間に実際の収益率が VaR を下回る確率が α であるという帰無仮説の下で, 尤度比検定量は次の式で表され, 漸近的に $\chi^2(1)$ 分布に従うものとして Kupiec (1995) は検定を行っている.¹

$$\lambda = 2 \log \left\{ \left(\frac{n_\kappa(\alpha)}{N} \right)^{n_\kappa(\alpha)} \left(1 - \frac{n_\kappa(\alpha)}{N} \right)^{N - n_\kappa(\alpha)} \right\} - 2 \log \{ \alpha^{n_\kappa(\alpha)} (1 - \alpha)^{N - n_\kappa(\alpha)} \}.$$

上記 7 つのモデルにおいて, それぞれ VaR の推定および尤度比検定を行うと, 以下のような結果が得られた. 表 3 に収益率が VaR を下回った回数および尤度比検定における p 値が掲載されている. 収益率が VaR を下回った回数は SV モデルが特に多く, 次いで SVL モデルも比較的多い結果となった. それ以外のモデル間では大きな差異はなかった. SV モデルや SVL モデルでは誤差分布に正規分布を仮定しているため, 収益率分布の左裾の厚みを十分に捉えきれておらず, VaR を甘めに推定してしまう傾向があるといえる. 有意水準 10% で検定を行うと, SV モデルは全ての分位点で帰無仮説が棄却された一方, 他のモデルではどの分位点でも帰無仮説は棄却

¹ 実際の観測値が VaR の予測値を超えるかどうかという 1/0 の 2 値データは i.i.d. でないため, 厳密にはこの検定量が漸近的に χ^2 分布に従うかどうかは明らかでない. ここでは, 文献でよく使われる検定として参考までに便宜的に使用する.

(i) 収益率が VaR を下回った回数

分位点	SV	SVL	SVt	SVLt	SVSKt	SVLSKt	SVLAHt
5%	62	52	49	43	50	40	47
1%	16	9	6	6	6	6	6
0.5%	11	3	2	2	2	2	2

(ii) 尤度比検定における p 値

分位点	SV	SVL	SVt	SVLt	SVSKt	SVLSKt	SVLAHt
5%	0.093	0.773	0.884	0.299	1.000	0.133	0.660
1%	0.079	0.746	0.170	0.170	0.170	0.170	0.170
0.5%	0.020	0.333	0.126	0.126	0.126	0.126	0.126

表 3: VaR の推計結果. 予測対象期間は 1,000 営業日.

されなかった.

次に, 期待ショートフォールの評価を行う. ここでは Embrechts *et al.* (2004) が提案した評価値を用いる. VaR の推定と同様の予測分布を用いて算出された各分位点の期待ショートフォールを $\widehat{ES}_t(\alpha)$ とおく. 具体的には, 予測分布において VaR よりも小さい値の確率標本の平均値によって求める. 収益率が VaR を下回る, すなわち $y_t < \widehat{VaR}_t(\alpha)$ を満たす t の集合を $\kappa(\alpha)$ とおき, $\delta_t(\alpha) = y_t - \widehat{ES}_t(\alpha)$ と定義する. また, $\delta^{(\alpha)}$ を $\{\delta_t(\alpha)\}_{t=1}^N$ の 100α 分位点とし, $\delta_t(\alpha) < \delta^{(\alpha)}$ を満たす t の集合を $\tau(\alpha)$ とおく. 最後に, $n_\tau(\alpha)$ を $\delta_t(\alpha) < \delta^{(\alpha)}$ が満たされる t の個数と定義する. すると, Embrechts *et al.* (2004) による期待ショートフォールの評価値は $D(\alpha) = (|D_1(\alpha)| + |D_2(\alpha)|)/2$ で表される. ただし,

$$D_1(\alpha) = \frac{1}{n_\kappa(\alpha)} \sum_{t \in \kappa(\alpha)} \delta_t(\alpha), \quad D_2(\alpha) = \frac{1}{n_\tau(\alpha)} \sum_{t \in \tau(\alpha)} \delta_t(\alpha).$$

$D_1(\alpha)$ は通常用いられる評価値であり, 実際の観測値が VaR を下回った場合, その観測値が推定された期待ショートフォールと平均的にどれくらい近いかを計測している. ただ, $D_1(\alpha)$ は VaR の推定値に大きく依存するため, VaR の精度によって $D_1(\alpha)$ の精度も影響されてしまう. この点を補正するために, VaR の推定値に依存しない期待ショートフォールの評価値として D_2 を用いている. D_2 は予測対象期間における全ての観測値と推定された期待ショートフォールの乖離について, 100α 分位点までの平均をとったものである. $D(\alpha)$ が小さければ小さいほど優れた期待ショート

(i) 評価値 $D_1(\times 10^2)$							
分位点	SV	SVL	SVt	SVLt	SVSKt	SVLSKt	SVLAHt
5%	0.002	0.172	0.168	0.164	0.192	0.157	0.212
1%	0.143	0.240	0.275	0.166	0.275	0.027	0.140
0.5%	0.305	0.303	0.276	0.111	0.222	-0.051	0.149

(ii) 評価値 $D_2(\times 10^2)$							
分位点	SV	SVL	SVt	SVLt	SVSKt	SVLSKt	SVLAHt
5%	-0.162	0.049	0.150	0.187	0.140	0.208	0.194
1%	-0.184	0.254	0.380	0.390	0.352	0.351	0.346
0.5%	-0.215	0.289	0.489	0.493	0.424	0.355	0.415

(iii) 総合評価値 $D(\times 10^2)$							
分位点	SV	SVL	SVt	SVLt	SVSKt	SVLSKt	SVLAHt
5%	0.082	0.111	0.159	0.175	0.166	0.183	0.203
1%	0.164	0.247	0.327	0.278	0.314	0.189	0.243
0.5%	0.260	0.296	0.382	0.302	0.323	0.203	0.282

表 4: 期待ショートフォールの推計結果.

フォールの推定値と考える.

表 4 には, 7 つの SV モデルにおける期待ショートフォールの評価値がそれぞれ分位点別に掲載されている. まず評価値 D_1 をみると, どの分位点でも SVLSKt モデルが優れており, 次いで SVLt モデルが優れた評価値となっている. また, SVLAHt モデルは, 5%, 1% 分位点では劣るが, 0.5% 分位点では比較的優れた評価値が得られた. SV モデルの 5% 分位点で突出して優れた評価値となっているが, 前述の VaR の検定において VaR を甘く推定しているため, ここでの評価値の結果の解釈には注意が必要である. 次に, 評価値 D_2 をみると, SV モデルを除いた中で, SVL モデルが全ての分位点において他のモデルより優れている. VaR の推定値に依存しない期待ショートフォールの評価値としては, SVL モデルが平均的に優れた精度をもっているといえるかもしれない. また, SVLSKt モデルも 1%, 0.5% 分位点で比較的優れた評価値となっている. 最後に総合評価値 D をみると, SV モデルを除いた中で, 5% 分位点では SVL モデルが最も優れている結果となった. 5% 分位点程度の裾であれば, 正規分布の誤差項でもレバレッジ効果を考慮していれば, t 分布を仮定するよりも平均的に優れた VaR および期待ショートフォールの精度が得られるのかもしれない.

1%, 0.5%分位点をみると, SVLSKt モデルが最も優れている結果となった. 次いで SVL モデル, SVLAHt モデルが優れており, SVLt モデルも比較的精度の良い結果が得られた. 全体的にレバレッジ効果を考慮している方が考慮していないモデルより優れた精度が得られている. これまでの文献の中でモデルのあてはまりに関して, レバレッジを考慮したモデルの優位性が議論されてきたが, リスク管理の面においてもレバレッジ効果の重要性が確かめられたといえる. また, 本稿で提案されている SVLSKt は誤差分布の左右非対称性を考慮しているため SVLt よりも分布の左側の裾が厚く捉えており, 5%分位点ではその優位性がみられなかったものの, さらに裾の先である 1%, 0.5%分位点では他のモデルよりも現実のデータをより適切に捉えていることが示された.

4 結論と今後の課題

本稿では, 株価の収益率分布の左右非対称性に注目し, 非対称性・レバレッジ効果を考慮した確率的ボラティリティ変動モデルにおいて, 裾が厚く左右非対称な一般化双曲型非対称 t 分布を誤差分布として仮定し, 米国株価指数 S&P500 の日次収益率データに適用して実証分析を行った. モデルの推定法には, マルコフ連鎖モンテカルロ法を用いたベイズ推定法を用い, 周辺尤度や VaR, 期待ショートフォールによるモデル比較を行った. その結果, 提案された SVLSKt モデルは, 非対称性を考慮していない SVLt モデルと比べて周辺尤度が高く, また 7 つの SV モデルの中で VaR および期待ショートフォールの精度も高いことから, 現実のデータへのあてはまりが優れていることが示された.

金融実務の観点からはモデルのあてはまりの優劣だけでなく, 本稿で分析したような分布の裾に関する精度の議論も重要である. 予測分布に関するモデル評価は, 頑健な結果を得ようとする計算負荷が増大するという点はあるが, 今後は, Eraker (2004), Chernov *et al.* (2003), Raggi and Bordignon (2006) 等で分析されているジャンプ項を含むモデルや, Durham (2007) で提案されている混合正規 (Mixture normal) 分布を誤差分布とする SV モデル等, 裾の左右非対称性に注目した様々なモデルと SVLSKt モデルのリスク指標における比較が今後の課題である.

補論

A 一般化双曲型 (GH) 非対称 t 分布

式 (4) で定義される GH 分布の密度関数は次の式で表される.

$$p(w_t) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^{\lambda/2} h(w_t|\delta, \mu_w)^{\hat{\lambda}}}{\sqrt{2\pi}\delta^\lambda K_\lambda(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})} K_{\hat{\lambda}}(\alpha h(w_t|\delta, \mu_w)) \exp\{\beta(w_t - \mu_w)\}.$$

ただし, K_j は指数 j を持つ変形された第 3 種のベッセル関数を表し, $\alpha = \sqrt{\gamma^2 + \beta^2}$, $\hat{\lambda} = \lambda - 1/2$, $h(w_t|\delta, \mu_w) = \sqrt{\delta^2 + (w_t - \mu_w)^2}$ である. 本稿で用いた GH 非対称 t 分布は, $\lambda = -\nu/2$, $\delta = \sqrt{\nu}$, $\gamma = 0$, $\mu_w = -\beta\mu_z$, $\mu_z = \nu/(\nu - 2)$ という制約を置いており, GH 分布の特別な場合である.

SVLSKt モデルにおいて, 非対称性・レバレッジ効果を考慮する場合, すなわち $\rho \neq 0$ の場合は y_t の周辺確率密度を一般に表すことができないが, この非対称性がない場合, つまり $\rho = 0$ の場合は表すことができ, 次のとおりである.

$$f(y_t|h_t) = \frac{\nu^{\frac{\nu}{2}} e^{\beta\tilde{y}_t} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) K_{\frac{\nu+1}{2}}\left(|\beta|\sqrt{\nu + \tilde{y}_t^2}\right) e^{-h_t/2}}{2^{\frac{\nu-1}{2}} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \left(\sqrt{\nu + \tilde{y}_t^2}/|\beta|\right)^{\frac{\nu+1}{2}}}, \quad (\beta \neq 0),$$

また,

$$f(y_t|h_t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{\tilde{y}_t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} e^{-h_t/2}, \quad (\beta = 0).$$

ただし, $\tilde{y}_t = y_t \exp(-h_t/2) + \beta\mu_z$ である. また, 4 次までのモーメントは以下のよう
に書ける.

$$\begin{aligned} E[y_t|h_t] &= \mu + \frac{\beta\nu}{\nu - 2}, \\ \text{Var}[y_t|h_t] &= \frac{2\beta^2\nu^2}{(\nu - 2)^2(\nu - 4)} + \frac{\nu}{\nu - 2}, \\ \text{Skewness}[y_t|h_t] &= \frac{2\sqrt{\nu(\nu - 4)}\beta}{\{2\beta^2\nu + (\nu - 2)(\nu - 4)\}^{3/2}} \left\{3(\nu - 2) + \frac{8\beta^2\nu}{\nu - 6}\right\}, \end{aligned}$$

$$\text{Kurtosis}[y_t|h_t] = \frac{6}{\{2\beta^2\nu + (\nu - 2)(\nu - 4)\}^2} \times \left\{ (\nu - 2)^2(\nu - 4) + \frac{16\beta^4\nu(\nu - 2)(\nu - 4)}{\nu - 6} + \frac{8\beta^4\nu^2(5\nu - 22)}{(\nu - 6)(\nu - 8)} \right\}.$$

なお、ここで、 k 次モーメントが存在するためには $\nu > 2k$ の条件が必要がある。GH 分布および GH 非対称 t 分布に関する解析的性質は、増田 (2002) を参照されたい。

B 事後分布からのサンプリング法

(ステップ 2) ϕ の事前分布を $\pi(\phi)$ とおく。 ϕ の条件付事後確率密度関数 $\pi(\phi|\cdot)$ ($\equiv \pi(\phi|\sigma, \rho, \mu, \beta, \nu, h, z, y)$) は、次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \pi(\phi|\cdot) &\propto \pi(\phi)\sqrt{1-\phi^2} \exp \left\{ -\frac{(1-\phi^2)\bar{h}_1^2}{2\sigma^2} - \sum_{t=1}^{n-1} \frac{(\bar{h}_{t+1} - \phi\bar{h}_t - \bar{y}_t)^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)} \right\} \\ &\propto \pi(\phi)\sqrt{1-\phi^2} \exp \left\{ -\frac{(\phi - \mu_\phi)^2}{2\sigma_\phi^2} \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

ただし、

$$\mu_\phi = \frac{\sum_{t=1}^{n-1} (\bar{h}_{t+1} - \bar{y}_t)\bar{h}_t}{\rho^2\bar{h}_1^2 + \sum_{t=2}^{n-1} \bar{h}_t^2}, \quad \sigma_\phi^2 = \frac{\sigma^2(1-\rho^2)}{\rho^2\bar{h}_1^2 + \sum_{t=2}^{n-1} \bar{h}_t^2}.$$

この条件付事後確率密度関数から確率標本を直接サンプリングすることはできないが、Metropolis Hasting(MH) アルゴリズムを用いて次のようにサンプリングを行うことができる。(例えば、Chib and Greenberg (1995), 大森・渡部 (2008) 等を参照)。まず、式 (11) の一部が正規分布の密度関数の核の形をしていることに注目して、提案分布を $TN_{(-1,1)}(\mu_\phi, \sigma_\phi^2)$ とおいて候補点 ϕ^* を発生させる。ただし、 $TN_{(a,b)}(\mu, \sigma^2)$ は平均 μ 、分散 σ^2 の定義域 (a, b) における切断正規分布を表す。この候補点 ϕ^* を次の確率で受容する。

$$\min \left\{ \frac{\pi(\phi^*)\sqrt{1-\phi^{*2}}}{\pi(\phi)\sqrt{1-\phi^2}}, 1 \right\}.$$

棄却した場合には、現在の点に留まる。

(ステップ3) σ と ρ の同時条件付事後分布を考える. $\vartheta = (\sigma, \rho)'$ と定義して, 事前分布を $\pi(\vartheta)$ と設定すると, ϑ の条件付事後確率密度関数 $\pi(\vartheta|\cdot)$ ($\equiv \pi(\vartheta|\phi, \mu, \beta, \nu, h, z, y)$) は次の式で表される.

$$\pi(\vartheta|\cdot) \propto \pi(\vartheta) \times \sigma^n (1 - \rho^2)^{\frac{n-1}{2}} \exp \left\{ -\frac{(1 - \phi^2)\bar{h}_1^2}{2\sigma^2} - \sum_{t=1}^{n-1} \frac{(\bar{h}_{t+1} - \phi\bar{h}_t - \bar{y}_t)^2}{2\sigma^2(1 - \rho^2)} \right\}. \quad (12)$$

この条件付事後確率密度関数からも確率標本を直接サンプリングすることはできないため, MH アルゴリズムを用いる. パラメータ (σ, ρ) には制約 $R = \{\vartheta : \sigma > 0, |\rho| < 1\}$ がある. このまま提案分布を考えてもよいが, ここでは ϑ から $\omega = (\omega_1, \omega_2)'$ への変数変換を行う. ただし, $\omega_1 = \log \sigma$, $\omega_2 = \log(1 + \rho) - \log(1 - \rho)$ である. この変換により, ω の定義域は $R' = \{-\infty < \omega_i < \infty; i = 1, 2\}$ となる. 次に条件付事後確率密度関数 (12) のモード (またはモードの近似値) を数値的に求め, その値を $\hat{\vartheta}$ とおき, また, 上の変数変換を施した値を $\hat{\omega}$ とする. 提案分布として $N(\omega_*, \Sigma_*)$ を用いて, 候補点 ω^* を発生させる. ただし,

$$\omega_* = \hat{\omega} + \Sigma_* \left. \frac{\partial \log \tilde{\pi}(\omega|\cdot)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\hat{\omega}}, \quad \Sigma_*^{-1} = - \left. \frac{\partial^2 \log \tilde{\pi}(\omega|\cdot)}{\partial \omega \partial \omega'} \right|_{\omega=\hat{\omega}}.$$

この候補点 ω^* を次の確率で受容する.

$$\min \left\{ \frac{\pi(\vartheta^*|\cdot) f_N(\omega|\omega_*, \Sigma_*) |J(\vartheta)|}{\pi(\vartheta|\cdot) f_N(\omega^*|\omega_*, \Sigma_*) |J(\vartheta^*)|}, 1 \right\}.$$

ただし, $f_N(x|\mu, \Sigma)$ は平均ベクトル μ , 分散共分散行列 Σ の二変量正規分布であり, $J(\cdot)$ は上の変数変換のヤコビアンを表す. なお, θ^* は ω^* を逆変換した点である.

(ステップ4) μ の事前分布を $N(\mu_0, v_0^2)$ とおく. μ の条件付事後確率密度関数 $\pi(\mu|\cdot)$ ($\equiv \pi(\mu|\phi, \sigma, \rho, \beta, \nu, h, z, y)$) は次の式で表される.

$$\pi(\mu|\cdot) \propto \exp \left\{ -\frac{(\mu - \mu_0)^2}{2v_0^2} - \frac{(1 - \phi^2)\bar{h}_1^2}{2\sigma^2} - \sum_{t=1}^{n-1} \frac{\{(h_{t+1} - \mu) - \phi(h_t - \mu) - \bar{y}_t\}^2}{2\sigma^2(1 - \rho^2)} \right\}.$$

ただし,

$$\sigma_\mu^2 = \left\{ \frac{1}{v_0^2} + \frac{(1 - \rho^2)(1 - \phi^2) + (n - 1)(1 - \phi)^2}{\sigma^2(1 - \rho^2)} \right\}^{-1},$$

$$\hat{\mu} = \sigma_{\mu}^2 \left\{ \frac{\mu_0}{v_0^2} + \frac{(1-\rho^2)(1-\phi^2)h_1 + (1-\phi) \sum_{t=1}^{n-1} (h_{t+1} - \phi h_t - \bar{y}_t)}{\sigma^2(1-\rho^2)} \right\}.$$

この条件付事後確率密度関数は正規分布の密度関数の核の形をしているので、サンプリングは、 $\mu|\cdot \sim N(\hat{\mu}, \sigma_{\mu}^2)$ となる。

(ステップ5) β の事前分布を $N(\beta_0, \sigma_0^2)$ とおく。 β の条件付事後確率密度関数 $\pi(\beta|\cdot)$ ($\equiv \pi(\beta|\phi, \sigma, \rho, \mu, \nu, h, z, y)$) は次の式で表される。

$$\pi(\beta|\cdot) \propto \exp \left\{ -\frac{(\beta - \beta_0)^2}{2\sigma_0^2} - \sum_{t=1}^n \frac{(y_t - \beta \bar{z}_t e^{h_t/2})^2}{2z_t e^{h_t}} - \sum_{t=1}^{n-1} \frac{\{\bar{h}_{t+1} - \phi \bar{h}_t - \rho \sigma (y_t e^{-h_t/2} - \beta \bar{z}_t) / \sqrt{z_t}\}^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)} \right\}.$$

ただし、

$$\sigma_{\beta}^2 = \left\{ \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{1}{1-\rho^2} \sum_{t=1}^{n-1} \frac{\bar{z}_t^2}{z_t} + \frac{\bar{z}_n^2}{z_n} \right\}^{-1},$$

$$\mu_{\beta} = \sigma_{\beta}^2 \left\{ \frac{\beta_0}{\sigma_0^2} + \frac{1}{1-\rho^2} \sum_{t=1}^{n-1} \frac{y_t \bar{z}_t}{z_t e^{h_t/2}} + \frac{y_n \bar{z}_n}{z_n e^{h_n/2}} - \frac{\rho}{\sigma(1-\rho^2)} \sum_{t=1}^{n-1} \frac{(\bar{h}_{t+1} - \phi \bar{h}_t) \bar{z}_t}{\sqrt{z_t}} \right\}.$$

この条件付事後確率密度関数も正規分布の密度関数の核の形をしているので、サンプリングは、 $\beta|\cdot \sim N(\mu_{\beta}, \sigma_{\beta}^2)$ となる。

(ステップ6) ν の事前分布を $\pi(\nu)$ と設定する。 ν の条件付事後確率密度関数 $\pi(\nu|\cdot)$ ($\equiv \pi(\nu|\phi, \sigma, \rho, \mu, \beta, h, z, y)$) は次の式で表される。

$$\pi(\nu|\cdot) \propto \pi(\nu) \times \prod_{t=1}^n \frac{(\nu/2)^{\nu/2}}{\Gamma(\nu/2)} z_t^{-\nu/2} \exp\left(-\frac{\nu}{2z_t}\right) \times \exp \left\{ -\sum_{t=1}^n \frac{(y_t - \beta \bar{z}_t e^{h_t/2})^2}{2z_t e^{h_t}} - \sum_{t=1}^{n-1} \frac{(\bar{h}_{t+1} - \phi \bar{h}_t - \bar{y}_t)^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)} \right\}, \quad \nu > 4.$$

この条件付事後確率密度関数は、直接サンプリングを行うことができないため、MH アルゴリズムを用いる。例えば、ステップ3のように、条件付事後確率密度関数のモードを用いた正規分布による提案分布でサンプリングを行うことができる。

(ステップ 7) z_t の条件付事後確率密度関数は次の式で表される。

$$\pi(z_t|\theta, h, y) \propto g(z_t) \times z_t^{-\left(\frac{\nu+1}{2}+1\right)} \exp\left(-\frac{\nu}{2z_t}\right).$$

ただし,

$$g(z_t) = \exp\left\{-\frac{(y_t - \beta\bar{z}_t e^{h_t/2})^2}{2z_t e^{h_t}} - \frac{(\bar{h}_{t+1} - \phi\bar{h}_t - \bar{y}_t)^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)} I(t < n)\right\}.$$

上の条件付事後確率密度関数は, $g(z_t)$ 以外の部分が逆ガンマ分布の密度関数の核の形をしているので, 提案分布を $z_t^* \sim IG((\nu+1)/2, \nu/2)$ とする MH アルゴリズムを用いて, サンプルングを行うことができる. このとき, 候補点 z_t^* の受容確率は, $\min\{g(z_t^*)/g(z_t), 1\}$ である.

(ステップ 8)

ボラティリティを表す潜在変数 h を効率的にサンプルングするために, multi-move sampler と呼ばれるサンプルング法を用いる. h の条件付事後確率密度関数 $\pi(h|\theta, z, y)$ から, 一度に h を直接サンプルングすることは難しい. そこで, 一度にサンプルングするのではなく, (h_1, \dots, h_n) をいくつかのブロックに分けて, 1 つのブロック内の潜在変数を, 他のブロックを条件付けた上で, 一度にサンプルングするという考え方である. 以下, Omori and Watanabe (2008), Nakajima and Omori (2010) に従って SVLSKt モデルにおける multi-move sampler の詳細を述べる.

まず, $t = 0, \dots, n$ に対して $\alpha_t = h_t - \mu$, および $\gamma = \exp(\mu/2)$ と定義し, $\{\alpha_t\}_{t=1}^n$ を潜在変数とする次の状態空間モデルを考える.

$$y_t = \{\beta\bar{z}_t + \sqrt{\bar{z}_t}\varepsilon_t\} \exp(\alpha_t/2)\gamma, \quad t = 1, \dots, n, \quad (13)$$

$$\alpha_{t+1} = \phi\alpha_t + \eta_t, \quad t = 0, \dots, n-1. \quad (14)$$

ここで, $\tilde{\Theta} = (\theta, \alpha_r, \alpha_{r+d+1}, z_r, \dots, z_{r+d}, y_r, \dots, y_{r+d})$ と定義し, 与えられているものとする. いま, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ 全体を $K+1$ 個のブロックに分割し, 任意のブロックを $(\alpha_{k_{i-1}+1}, \dots, \alpha_{k_i})$ と表す. ただし, $i = 1, \dots, K+1$, $k_0 = 0$, $k_{K+1} = n$ である. ブロックの分割方法は, 例えば, Shephard and Pitt (1997) が提案している stochastic

knots という方法があり, $i = 1, \dots, K$ に対して $k_i = \text{int} [n(i + U_i)/(K + 2)]$ と定める. ただし, U_i は区間 $[0, 1]$ で定義される一様分布からの乱数を表し, $\text{int}[\cdot]$ は整数部分を表す関数である. MCMC 法のアルゴリズムにおいて, ブロックの節目である (k_1, \dots, k_K) を毎回ランダムに決めることにより, サンプルングの効率性を高めることができるといわれている.

以下, 特定のブロック $(\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_{r+d})$ に注目して, このブロック内の潜在変数の同時事後確率密度関数からのサンプルング方法を考える. ただし, $r \geq 0, d \geq 1, r + d \leq n$ である. このブロックに関する誤差項の分布に基づいて同時事後確率密度関数を考えると, 以下のようになる.

$$\begin{aligned} (\eta_r, \dots, \eta_{r+d-1}) &\sim \pi(\eta_r, \dots, \eta_{r+d-1} | \tilde{\Theta}) \\ &\propto \prod_{t=r}^{r+d} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\sigma}_t}} \exp\left\{-\frac{(y_t - \tilde{\mu}_t)^2}{2\tilde{\sigma}_t^2}\right\} \times \prod_{t=r}^{r+d-1} f(\eta_t) \times f(\alpha_{r+d}). \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_t &= \begin{cases} \{\beta\bar{z}_t + \rho\sqrt{z_t}(\alpha_{t+1} - \phi\alpha_t)/\sigma\} \exp(\alpha_t/2)\gamma & (t < n \text{ のとき}) \\ \beta\bar{z}_n \exp(\alpha_n/2)\gamma & (t = n \text{ のとき}), \end{cases} \\ \tilde{\sigma}_t^2 &= \begin{cases} (1 - \rho^2)z_t \exp(\alpha_t)\gamma^2 & (t < n \text{ のとき}) \\ z_n \exp(\alpha_n)\gamma^2 & (t = n \text{ のとき}), \end{cases} \\ f(\alpha_{r+d}) &= \begin{cases} \exp\left\{-\frac{(\alpha_{r+d+1} - \phi\alpha_{r+d})^2}{2\sigma^2}\right\} & (r + d < n \text{ のとき}) \\ 1 & (r + d = n \text{ のとき}). \end{cases} \end{aligned}$$

ここで, $\underline{\eta} = (\eta_r, \dots, \eta_{r+d-1})'$, $\underline{\alpha} = (\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_{r+d})'$ とおき, 以下の変数を定義する.

$$\begin{aligned} L &= \sum_{t=r}^{r+d} \left\{ -\frac{\alpha_t}{2} - \frac{(y_t - \tilde{\mu}_t)^2}{2\tilde{\sigma}_t^2} \right\} + \log f(\alpha_{r+d}), \\ \delta &= (\delta_{r+1}, \dots, \delta_{r+d})', \quad \delta_t = \frac{\partial L}{\partial \alpha_t}, \end{aligned}$$

$$Q = -E \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \underline{\alpha} \partial \underline{\alpha}'} \right) = \begin{pmatrix} A_{r+1} & B_{r+2} & 0 & \cdots & 0 \\ B_{r+2} & A_{r+2} & B_{r+3} & \cdots & 0 \\ 0 & B_{r+3} & A_{r+3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & B_{r+d} \\ 0 & \cdots & 0 & B_{r+d} & A_{r+d} \end{pmatrix},$$

$$A_t = -E \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha_t^2} \right),$$

$$B_t = -E \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha_t \partial \alpha_{t-1}} \right), \quad t = r+2, \dots, r+d, \quad B_{r+1} = 0.$$

δ の定義における 1 次微分は以下のように書ける.

$$\delta_t = -\frac{1}{2} + \frac{(y_t - \tilde{\mu}_t)^2}{2\tilde{\sigma}_t^2} + \frac{y_t - \tilde{\mu}_t}{\tilde{\sigma}_t^2} \cdot \frac{\partial \tilde{\mu}_t}{\partial \alpha_t} + \frac{y_{t-1} - \tilde{\mu}_{t-1}}{\tilde{\sigma}_{t-1}^2} \cdot \frac{\partial \tilde{\mu}_{t-1}}{\partial \alpha_t} + j(\alpha_t).$$

ただし,

$$\frac{\partial \tilde{\mu}_t}{\partial \alpha_t} = \begin{cases} \left\{ \frac{\beta \bar{z}_t}{2} + \rho \sqrt{z_t} \left(-\phi + \frac{\alpha_{t+1} - \phi \alpha_t}{2} \right) / \sigma \right\} \exp(\alpha_t/2) \gamma & (t < n \text{ のとき}) \\ \frac{\beta \bar{z}_n}{2} \exp(\alpha_t/2) \gamma & (t = n \text{ のとき}), \end{cases}$$

$$\frac{\partial \tilde{\mu}_{t-1}}{\partial \alpha_t} = \begin{cases} 0 & (t = 1 \text{ のとき}) \\ \rho \sqrt{z_{t-1}} \exp(\alpha_{t-1}/2) \gamma / \sigma & (t > 1 \text{ のとき}), \end{cases}$$

$$j(\alpha_t) = \begin{cases} \frac{\phi(\alpha_{t+1} - \phi \alpha_t)}{\sigma^2} & (t = r+d < n \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases}$$

また, A_t および B_t の定義における 2 次微分の期待値は, y_t について期待値をとることにより, 以下のように書ける.

$$A_t = \frac{1}{2} + \frac{1}{\tilde{\sigma}_t^2} \left(\frac{\partial \tilde{\mu}_t}{\partial \alpha_t} \right)^2 + \frac{1}{\tilde{\sigma}_{t-1}^2} \left(\frac{\partial \tilde{\mu}_{t-1}}{\partial \alpha_t} \right)^2 + j'(\alpha_t),$$

$$B_t = \frac{1}{\tilde{\sigma}_{t-1}^2} \cdot \frac{\partial \tilde{\mu}_{t-1}}{\partial \alpha_{t-1}} \cdot \frac{\partial \tilde{\mu}_{t-1}}{\partial \alpha_t}.$$

ただし,

$$j'(\alpha_t) = \begin{cases} \phi^2/\sigma^2 & (t = r + d < n \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases}$$

次に, 上の同時事後確率密度関数の対数値のモード (あるいはモードの近似値) を $\hat{\eta}$ とおくと, $\underline{\eta} = \hat{\eta}$ における対数同時事後確率密度関数の 2 次までのテイラー展開は, 次のように書ける.

$$\begin{aligned} & \log \pi(\underline{\eta}|\tilde{\Theta}) \\ & \approx \hat{L} + \left. \frac{\partial L}{\partial \underline{\eta}'} \right|_{\underline{\eta}=\hat{\eta}} (\underline{\eta} - \hat{\eta}) + \frac{1}{2} (\underline{\eta} - \hat{\eta})' E \left(\left. \frac{\partial^2 L}{\partial \underline{\eta} \partial \underline{\eta}'} \right) \right|_{\underline{\eta}=\hat{\eta}} (\underline{\eta} - \hat{\eta}) + \sum_{t=r}^{r+d-1} \left(-\frac{1}{2} \eta_t^2 \right) + (\text{定数}) \\ & = \hat{L} + \hat{\delta}'(\underline{\alpha} - \hat{\alpha}) - \frac{1}{2} (\underline{\alpha} - \hat{\alpha})' \hat{Q} (\underline{\alpha} - \hat{\alpha}) + \sum_{t=r}^{r+d-1} \left(-\frac{1}{2} \eta_t^2 \right) + (\text{定数}) \\ & \equiv \log q(\underline{\eta}|\tilde{\Theta}). \end{aligned}$$

ただし, \hat{L} , $\hat{\delta}$, \hat{Q} はそれぞれ $\underline{\alpha} = \hat{\alpha}$, (すなわち $\underline{\eta} = \hat{\eta}$) における L , δ , Q の値である. この最後に得られた確率密度関数 $q(\underline{\eta}|\tilde{\Theta})$ は, 我々が求めたい同時事後確率密度関数についてモード付近を中心に近似しており, MH アルゴリズムにおける提案分布として利用できる. また, 確率密度関数 $q(\underline{\eta}|\tilde{\Theta})$ は下で述べる線形ガウス状態空間モデル (15)–(17) における確率密度関数と一致する. このため, この状態空間モデルを基に, 上の提案分布からの確率標本を効率的に発生させることが可能となる.

具体的には次の 2 つのアルゴリズムを用いる. 1 つめは, モード $\hat{\eta}$ を求める方法である.

アルゴリズム 1 (Disturbance smoother):

1. $\hat{\eta}$ の初期値を定め, 式 (14) を用いて, $\underline{\eta} = \hat{\eta}$ における $\hat{\alpha}$ の値を計算する.
2. $\underline{\alpha} = \hat{\alpha}$ における $\{\hat{\delta}_t\}$, $\{\hat{A}_t\}$, $\{\hat{B}_t\}$ の値をそれぞれ計算する.
3. $\hat{D}_{r+1} = \hat{A}_{r+1}$, $\hat{b}_{r+1} = \hat{\delta}_{r+1}$ とおいて, 次の変数を, $t = r + 2, \dots, r + d$ まで繰り返し計算する.

$$\hat{D}_t = \hat{A}_t - \hat{D}_{t-1}^{-1} \hat{B}_t^2, \quad \hat{K}_t = \sqrt{\hat{D}_t}, \quad \hat{b}_t = \hat{\delta}_t - \hat{B}_t \hat{D}_{t-1}^{-1} \hat{b}_{t-1}.$$

ただし, $\hat{B}_{d+r+1} = 0$ とする.

4. $t = r + 1, \dots, r + d$ に対してそれぞれ, $\hat{y}_t = \hat{\gamma}_t + \hat{D}_t^{-1}\hat{b}_t$ と定義する. ただし, $\hat{\gamma}_t = \hat{\alpha}_t + \hat{D}_t^{-1}\hat{B}_{t+1}\hat{\alpha}_{t+1}$, $\hat{\alpha}_{r+d+1} = \alpha_{r+d+1}$ である.
5. 次の線形ガウス状態空間モデルを考える.

$$\hat{y}_t = Z_t\alpha_t + G_t\zeta_t, \quad t = r + 1, \dots, r + d, \quad (15)$$

$$\alpha_{t+1} = \phi\alpha_t + H_t\zeta_t, \quad t = r, \dots, r + d, \quad (16)$$

$$\zeta_t \sim N(0, I_2). \quad (17)$$

ただし, $t = r + 1, \dots, r + d$ に対して,

$$Z_t = 1 + \phi\hat{D}_t^{-1}\hat{B}_{t+1}, \quad G_t = (\hat{K}_t^{-1}, \hat{D}_t^{-1}\hat{B}_{t+1}\sigma), \quad H_t = (0, \sigma),$$

および, $H_0 = (0, \sigma/\sqrt{1-\phi^2})$ である. この状態空間モデルに対して, Kalman filter および Disturbance smoother を適用する.

6. 2へ戻る.

ステップ 1 において $\hat{\eta}$ の初期値が必要となるが, 例えば, MCMC 法のアルゴリズムにおける $\underline{\eta}$ の現在の値を用いればよい.

2つめのアルゴリズムとして, $\underline{\eta}$ の確率標本を得るため, アルゴリズム 1 で求めたモード $\hat{\eta}$ を基に, AR(Accept-Reject)-MH アルゴリズムを用いてサンプリングを行う. (AR-MH アルゴリズムに関しては, 例えば大森 (2001), 伊庭他 (2001) 等を参照されたい). このとき, Jong and Shephard (1995) や Durbin and Koopman (2002) によって提案された Simulation smoother を利用する.

アルゴリズム 2 (Simulation smoother を用いた AR-MH アルゴリズム):

1. $\underline{\eta}_0$ を現在の点とし, アルゴリズム 1 を用いて同時事後確率密度関数のモード $\hat{\eta}$ を求める.
2. アルゴリズム 1 のステップ 2-4 を計算して, 近似された線形ガウス状態空間モデル (15)-(17) を得る.
3. 候補点として, $\underline{\eta}^*$ を提案確率密度関数 $\tilde{q}(\underline{\eta}^*) \propto \min\{\pi(\underline{\eta}^*|\tilde{\Theta}), cq(\underline{\eta}^*|\tilde{\Theta})\}$ から Accept-Reject(AR) アルゴリズムを用いて次のように発生させる.

- (a) Simulation smoother を状態空間モデル (15)–(17) に適用して, 候補点 $\underline{\eta}^*$ を発生させる.
- (b) この候補点 $\underline{\eta}^*$ を次の確率で受容する.

$$\frac{\min\{\pi(\underline{\eta}^*|\tilde{\Theta}), cq(\underline{\eta}^*|\tilde{\Theta})\}}{cq(\underline{\eta}^*|\tilde{\Theta})}.$$

棄却した場合は, (a) へ戻って繰り返す.

4. 候補点 $\underline{\eta}^*$ に対して, MH アルゴリズムを行う. 受容確率は次の式で与えられる.

$$\min \left\{ \frac{\pi(\underline{\eta}^*|\tilde{\Theta}) \min\{\pi(\underline{\eta}_0|\tilde{\Theta}), cq(\underline{\eta}_0|\tilde{\Theta})\}}{\pi(\underline{\eta}_0|\tilde{\Theta}) \min\{\pi(\underline{\eta}^*|\tilde{\Theta}), cq(\underline{\eta}^*|\tilde{\Theta})\}} \right\}.$$

(予測分布のサンプリング) (i) 次の式に従って, h_{n+1} を発生させる.

$$\begin{aligned} h_{n+1}|\theta, h, y &\sim N(\mu_{n+1}, \sigma_{n+1}^2), \\ \mu_{n+1} &= \mu + \phi(h_n - \mu) + \rho\sigma(y_n - \beta\bar{z}_n e^{ht/2}) \exp(-h_n/2)/\sqrt{z_n}, \\ \sigma_{n+1}^2 &= \sigma^2(1 - \rho^2). \end{aligned}$$

(ii) $z_{n+1} \sim IG(\nu/2, \nu/2)$ を発生させる. (iii) 得られた h_{n+1} および z_{n+1} を用いて, y_{n+1} を次の式に従って発生させる.

$$\begin{aligned} y_{n+1}|\theta, h_{n+1}, z_{n+1} &\sim N(\hat{\mu}_{n+1}, \hat{\sigma}_{n+1}^2), \\ \hat{\mu}_{n+1} &= \beta(z_{n+1} - \mu_z) \exp(h_{n+1}/2), \\ \hat{\sigma}_{n+1}^2 &= z_{n+1} \exp(h_{n+1}). \end{aligned}$$

参考文献

- Aas, K. and I. H. Haff (2006), “The generalized hyperbolic skew Student’s t-distribution,” *Journal of Financial Econometrics*, 4, 275–309.
- Andersson, J. (2001), “On the normal inverse Gaussian stochastic volatility model,” *Journal of Business and Economic Statistics*, 19, 44–54.

- Azzalini, A. and A. Capitanio (2003), “Distributions generated by perturbation of symmetry with emphasis on a multivariate skew t distribution,” *Journal of the Royal Statistical Society B*, 65, 579–602.
- Barndorff-Nielsen, O. E. (1977), “Exponentially decreasing distributions for the logarithm of particle size,” *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, 353, 401–419.
- (1997), “Normal inverse Gaussian distributions and stochastic volatility modelling,” *Scandinavian Journal of Statistics*, 24, 1–13.
- Berg, A., R. Meyer, and J. Yu (2004), “DIC as a model comparison criterion for stochastic volatility models,” *Journal of Business and Economic Statistics*, 22, 107–120.
- Black, F. (1976), “Studies of stock market volatility changes,” in *Proceedings of the American Statistical Association, Business and Economic Statistics Section*, 177–181.
- Chernov, M., A. R. Gallant, E. Ghysels, and G. Tauchen (2003), “Alternative models for stock price dynamics,” *Journal of Econometrics*, 116, 225–257.
- Chib, S. (1995), “Marginal likelihood from the Gibbs output,” *Journal of the American Statistical Association*, 90, 1313–1321.
- Chib, S. and E. Greenberg (1995), “Understanding the Metropolis-Hastings algorithm,” *American Statistician*, 49, 327–335.
- Chib, S. and I. Jeliazkov (2001), “Marginal likelihood from the Metropolis-Hastings output,” *Journal of the American Statistical Association*, 96, 270–291.
- Chib, S., F. Nardari, and N. Shephard (2002), “Markov chain Monte Carlo Methods for stochastic volatility models,” *Journal of Econometrics*, 108, 281–316.
- Doornik, J.A. (2006), *Ox: Object Oriented Matrix Programming*, London, Timberlake Consultants Press.
- Durbin, J. and S. J. Koopman (2002), “Simple and efficient simulation smoother for state space time series analysis,” *Biometrika*, 89, 603–616.
- Durham, G. B. (2007), “SV mixture models with application to S&P 500 index returns,” *Journal of Financial Economics*, 85, 822–856.
- Eberlein, E., U. Keller, and K. Prause (1998), “New insights into smile, mispricing and value at risk: the hyperbolic model,” *Journal of Business*, 71, 371–405.

- Embrechts, P., R. Kaufmann, and P. Patie (2004), “Strategic long-term financial risks: Single risk factors,” *Computational Optimization and Applications*, 32, 61–90.
- Eraker, B. (2004), “Do equity prices and volatility jump? Reconciling evidence from spot and option prices,” *Journal of Finance*, 59, 1367–1403.
- Eraker, B., M. Johanners, and N. G. Polson (2003), “The impact of jumps in returns and volatility,” *Journal of Finance*, 53, 1269–1330.
- Fernández, C. and M. F. J. Steel (1998), “On Bayesian modeling of fat tails and skewness,” *Journal of the American Statistical Association*, 93, 359–371.
- Gamerman, D. and H. F. Lopes (2006), *Markov Chain Monte Carlo. Stochastic Simulation for Bayesian Inference*, Boca Raton, FL, Chapman & Hall/CRC, 2nd edition.
- Ghysels, E., A. C. Harvey, and E. Renault (2002), “Stochastic volatility,” in C. R. Rao and G. S. Maddala eds. *Statistical Methods in Finance*, Amsterdam: North-Holland, 119–191.
- Hansen, B. E. (1994), “Autoregressive conditional density estimation,” *International Economic Review*, 35, 705–730.
- Jones, M. C. and M. J. Faddy (2003), “A skew extension of the t -distribution, with application,” *Journal of Royal Statistical Society, Series B*, 65, 159–174.
- de Jong, P. and N. Shephard (1995), “The simulation smoother for time series models,” *Biometrika*, 82, 339–350.
- Kim, S., N. Shephard, and S. Chib (1998), “Stochastic volatility: likelihood inference and comparison with ARCH models,” *Review of Economic Studies*, 65, 361–393.
- Koop, G. (2003), *Bayesian Econometrics*, Chichester, Wiley.
- Kupiec, P. (1995), “Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models,” *Journal of Derivatives*, 2, 173–184.
- Nakajima, J. and Y. Omori (2009), “Leverage, heavy-tails and correlated jumps in stochastic volatility models,” *Computational Statistics and Data Analysis*, 53, 2535–2553.
- (2010), “Stochastic volatility model with leverage and asymmetrically heavy-tailed error using GH skew Student’s t -distribution.” *Computational Statistics and Data Analysis*, in press.

- Nelson, D. B. (1991), “Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach,” *Econometrica*, 59, 347–370.
- Omori, Y. and T. Watanabe (2008), “Block sampler and posterior mode estimation for asymmetric stochastic volatility models,” *Computational Statistics and Data Analysis*, 52, 2892–2910.
- Omori, Y., S. Chib, N. Shephard, and J. Nakajima (2007), “Stochastic volatility with leverage: fast likelihood inference,” *Journal of Econometrics*, 140, 425–449.
- Pitt, M. and N. Shephard (1999), “Filtering via simulation: auxiliary particle filter,” *Journal of the American Statistical Association*, 94, 590–599.
- Prause, K. (1999), “The Generalized Hyperbolic models: estimation, financial derivatives and risk measurement.” PhD dissertation, University of Freiburg.
- Raggi, D. and S. Bordignon (2006), “Comparing stochastic volatility models through Monte Carlo simulations,” *Computational Statistics and Data Analysis*, 50, 1678–1699.
- Shephard, N. (2005), *Stochastic Volatility: Selected Readings*, Oxford, Oxford University Press.
- Shephard, N. and M. Pitt (1997), “Likelihood analysis of non-Gaussian measurement time series,” *Biometrika*, 84, 653–667.
- Silva, R. S., H. F. Lopes, and H. S. Migon (2006), “The extended generalized inverse Gaussian distribution for log-linear and stochastic volatility models,” *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, 20, 67–91.
- Watanabe, T. and Y. Omori (2004), “A multi-move sampler for estimating non-Gaussian time series models: Comments on Shephard & Pitt (1997),” *Biometrika*, 91, 246–248.
- Yu, J. (2005), “On leverage in a stochastic volatility model,” *Journal of Econometrics*, 127, 165–178.
- 伊庭幸人・種村正美・大森裕浩・和合肇・佐藤整尚・高橋明彦 (2001), 『計算統計 II マルコフ連鎖モンテカルロ法とその周辺』岩波書店 .
- 大森裕浩 (2001), 「マルコフ連鎖モンテカルロ法の最近の展開」『日本統計学会誌』第 31 巻, 308–334 .
- 大森裕浩・渡部敏明 (2008), 「MCMC とその確率的ボラティリティ変動モデルへの応用」国友直人・山本拓 (編) 『21 世紀の統計科学 I 社会・経済と統計科学』東京大学出版会, 第 9 章, 223–266 .

- 中妻照雄 (2003), 『ファイナンスのための MCMC 法によるベイズ分析』三菱経済研究所 .
- 増田弘毅 (2002), 「GIG 分布と GH 分布に関する解析」『統計数理』第 50 巻, 第 2 号, 165–199 .
- 山井康浩・吉羽要直 (2001), 「バリュー・アット・リスクの妥当性について 理論サーベイによる期待ショートフォールとの比較分析」『金融研究』第 20 巻, 第 2 号, 33–68 .
- 和合肇 (編) (2005), 『ベイズ計量経済分析』東洋経済新報社 .
- 渡部敏明 (2000), 『ボラティリティ変動モデル』朝倉書店 .
- 渡部敏明・佐々木浩二 (2006), 「ARCH 型モデルと “Realized Volatility” によるボラティリティ予測とバリュー・アット・リスク」『金融研究』第 25 巻別冊, 第 2 号, 39–47 .