

CARF ワーキングペーパー

CARF-J-104

粒子フィルタを用いた最適ポートフォリオの構築

中野雅史・佐藤整尚・高橋明彦・高橋総一郎
東京大学大学院経済学研究科

平成 28 年 5 月 12 日 ; 平成 28 年 5 月 31 日改訂 ;
平成 28 年 7 月 13 日再改訂

❁ 現在、CARF は第一生命、野村ホールディングス、三井住友銀行、三菱東京 UFJ 銀行（五十音順）から財政的支援をいただいております。CARF ワーキングペーパーはこの資金によって発行されています。

CARF ワーキングペーパーの多くは
以下のサイトから無料で入手可能です。
http://www.carf.e.u-tokyo.ac.jp/workingpaper/index_j.html

このワーキングペーパーは、内部での討論に資するための未定稿の段階にある論文草稿です。著者の承諾無しに引用・複写することは差し控えて下さい。

粒子フィルタを用いた最適ポートフォリオの構築*

中野雅史・佐藤整尚・高橋明彦・高橋聡一郎†

東京大学経済学研究科‡

平成 28 年 5 月 12 日；平成 28 年 5 月 31 日改訂；平成 28 年 7 月 13 日再改訂

概要

本稿では、粒子フィルタを活用したポートフォリオ構築の新しい手法を提案する。特に、モンテカルロ・フィルタに基づく資産の期待リターンとボラティリティの推定により、平均分散ポートフォリオのパフォーマンスが飛躍的に向上することを示す。

我々は、状態空間モデルの枠組みにおいて、非対称性を持つボラティリティに加え、期待リターンに関する状態変数も確率過程として取り込むことにより、ボラティリティの時間変化と整合的なリターンを予測する。その結果、一般的な移動平均・分散に基づく平均分散ポートフォリオのみならず、等ウェイト (Equal Weight)、最小分散、リスクパリティ (Risk Parity) などのリターン予測に依拠しない手法を凌駕する運用成果が実現可能なことを明らかにする。

また、投資対象としては、国内外の株式・債券に加えリート (REIT) を組み入れ、空売り禁止条項や取引費用、投資比率制約も考慮することで、より現実的な国際分散投資を考察する。さらに、ポートフォリオのパフォーマンス指標として、複利リターンやシャープ・レシオに加え、実務的には重要な指標であるソルティノ・レシオや最大ドローダウンも採用し、多角的に評価することにより、我々の提案する手法の有効性及び頑健性を確認する。

キーワード：状態空間モデル，粒子フィルタ，モンテカルロ・フィルタ，リターン予測，確率的ボラティリティ，国際分散投資，平均分散ポートフォリオ，リスクパリティ，取引コスト，空売り禁止条項

*英文表題：Optimal Portfolio with Particle Filtering

†著者英文名：Masafumi Nakano, Seisho Sato, Akihiko Takahashi, Soichiro Takahashi

‡所属機関英文名：Graduate School of Economics, University of Tokyo

1 はじめに

本稿では、状態空間モデルの枠組みを用い、モンテカルロ・フィルタ (Kitagawa (1996)) によるポートフォリオ構築の新しい手法を提案する。特に、非対称性を持つボラティリティに加え期待リターンに関する状態変数も推定することにより、高い運用成果を示す平均分散ポートフォリオが構築できることを示す。さらに、自己組織化 (Kitagawa (1998)) によるパラメータ推定においてはカーネル平滑化 (Liu and West (2001)) を活用する。

金融経済学の学術的研究において、資産リターンの予測可能性は最も重要な争点の一つである。例えば、Lettau and Ludvigson (2001) は、株式の超過リターンを dividend-price ratios や earning-price ratios といった説明変数から予測可能であると主張しているが、Goyal and Welch (2008) は様々な指標を説明変数として用いた体系的な実証分析の結論として、その予測可能性を否定している。また、ポートフォリオ理論の研究においても、Markowitz (1952) に始まる平均分散ポートフォリオの問題点の一つとして、期待リターンの推定の不安定性が指摘されており、こうした背景から、期待リターンに依拠せず、比較的推定の安定したボラティリティと相関のみに基づくポートフォリオ戦略も考案されている¹。

このようなファイナンス分野における学術的な議論や発展がある一方で、時系列分析の分野においては、ベイズ統計のファイナンスへの応用を試みる研究が盛んである。これらの中で、Taylor (1986) 等に始まる確率的ボラティリティ (Stochastic Volatility, SV) モデルに関する研究がよく知られているが、その非線形性ゆえに、モデルの推定にはマルコフ連鎖モンテカルロ法 (Markov Chain Monte Carlo, MCMC) や粒子フィルタ (Particle Filter, PF) といったモンテカルロ的なベイズ統計の手法が用いられる。近年では、ボラティリティの非対称性 (レバレッジ効果) やジャンプ、レジーム・スイッチングの導入等と共に高次元化も図られており、こうしたより一般的なモデルに対するパラメータ推定やモデル比較の手法が次々と提案されている。しかしその一方で、具体的なポートフォリオ問題への応用を行った研究は少ない。

本稿の先行研究としては、まず Aguilar and West (2000) が挙げられる。Aguilar and West (2000) では、期待リターンに関する状態変数を AR(1) 過程とし、因子確率的ボラティリティ (Factor Stochastic Volatility, FSV) モデルを仮定した上で、ポートフォリオ問題に応用している。モデルの推定方法は、データを前半と後半に分け、前半部分のデータに MCMC を適用することによりパラメータを推定し、そのパラメータを所与として後半データに対して粒子フィルタを実行するというものである。しかし、この方法では後半部分のデータから得られる情報をパラメータ推定に活かさない²。また、モデル上は確率過程として設定されている期待リターンに関する状態変数も、推定時には定数パラメータとして単純化されている。

一方、Zhou et al. (2014) は、Aguilar and West (2000) の設定を基本的に踏襲しつつ、FSV モデルを拡張し、ポートフォリオ問題に応用している。但しこの論文では、各時点においてそれま

¹ 例えば、Roncalli (2014) や Braga (2016) を参照のこと。

² Aguilar and West (2000) 自身も指摘するように、これは逐次モンテカルロ法である粒子フィルタを用いれば解決する問題と言える。

での全てのデータを用いた MCMC を実行し一期先予測することを繰り返しているため、その計算負荷はかなり大きいと想定される。

他の研究としては、Johannes et al. (2014) がある。彼らは、確率的ボラティリティモデルを仮定した上で、配当利回りをファクター(説明変数)と捉え、そのファクター・ローディング(factor loading)を状態変数として粒子フィルタにより推定し、ポートフォリオ問題を考察している。但し、単一危険資産のケースのみを扱っており、実用的には不十分であるといえる。

こうした先行研究を参考に、本稿では、Kitagawa (1998) の自己組織化状態空間モデルの枠組みにおいて、非対称性を持つボラティリティに加え、期待リターンに関する状態変数もモデルに取り入れ、粒子フィルタ(モンテカルロ・フィルタ)によりモデルの状態及びパラメータを逐次的に推定した。特に、パラメータ推定に関しては、Liu and West (2001) のカーネル平滑化法を活用した。

その結果、ボラティリティの時間変化と整合的なリターン予測が可能となり、平均分散ポートフォリオのパフォーマンスが、ベンチマークとなる移動平均・分散のケースと比して大きく向上した。さらに、比較のために、期待リターンとボラティリティに関する状態変数の何れかを定数パラメータとするなど、より簡易なモデルに基づく平均分散ポートフォリオも試算したが、殆どのパフォーマンス指標(詳しくは、一部のリスク回避度における最大ドローダウンを除く全てのパフォーマンス指標)において、期待リターンとボラティリティに関する状態変数を確率過程として同時に推定する我々のモデルが優れているという結果を得た。

また、ポートフォリオ戦略としては、平均分散ポートフォリオだけではなく、最小分散やリスクパリティといったボラティリティのみに基づくポートフォリオ戦略も試算したが、この場合は、どのモデルもベンチマーク(移動平均・分散)を安定的に上回ることはなかった。これはボラティリティと期待リターンの動的変化の推定を同時に行うことの重要性を強調した Johannes et al. (2014) の分析と整合的である。

尚、ポートフォリオ構成においては、空売り禁止条項や取引費用、投資比率制約を考慮し、投資対象としてグローバルな株式や債券に加えリート(REIT)も含めた。またポートフォリオ・パフォーマンスも、複利リターンやシャープ・レシオに加え、ソルティノ・レシオや最大ドローダウンといった実務的に重要な指標も用いて評価し、我々の提案する手法の優位性を多角的に確認した。

本稿の構成は次の通りである。2節では、本稿で扱う6種類のモデルを紹介し、3節では、状態空間モデルの枠組みを導入した上で、モデルの推定に用いる粒子フィルタのアルゴリズムを説明する。4節では、モデルの具体的な推定方法と推定結果をまとめ、5節では最適ポートフォリオを構築しパフォーマンス比較を行う。最後に6節で結論を述べる。

2 モデル

本稿では、資産リターン(収益率)の確率過程 $y = \{y_t : t \geq 0\}$ に関して、Taylor (1986) 等の SV モデルを拡張することにより、以下のような SMSV(Stochastic Mean and Stochastic Volatility)

モデルを導入した。

$$\begin{aligned}
 y_t &= \mu_t + \exp(x_t/2)\epsilon_t, & \epsilon_t &\sim N(0,1) \\
 x_t &= \bar{x} + \phi_x x_{t-1} + \sigma_x \xi_t, & \xi_t &\sim N(0,1) \\
 \mu_t &= \bar{\mu} + \phi_\mu \mu_{t-1} + \sigma_\mu \eta_t, & \eta_t &\sim N(0,1)
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

但し、 y_t は t 時点におけるリターン (収益率) であり、 $\mu = \{\mu_t : t \geq 0\}$, $x = \{x_t : t \geq 0\}$ は各々、期待リターンとリターンの標準偏差 (ボラティリティ) に関する状態変数の変動を表現する確率過程である。また、 \bar{x} , $\bar{\mu}$, ϕ_x , ϕ_μ , σ_x , σ_μ は実数値定数で、 ϕ_x , ϕ_μ には $|\phi_x| < 1, |\phi_\mu| < 1$ の条件を課す。さらに、 $Cov(\epsilon_t, \eta_t) = Cov(\xi_t, \eta_t) = 0$, $Cov(\epsilon_t, \xi_t) = \rho$ ($|\rho| \leq 1$) を仮定する。特に、 ϵ_t と ξ_t の相関については、ファイナンスの実証研究の多くがリターンとボラティリティ間の負の相関 (所謂, leverage effect) を報告していることを確認するため、一般的に $|\rho| \leq 1$ とした³。

本稿では多資産ポートフォリオ問題への応用を想定しているため、他の状態やパラメータと同時にリターン間の相関も推定すべきである⁴。しかしながら、リターン間の相関係数の数は資産数を n とすると $n(n-1)/2$ であるので、モデルを多資産化すると非常に多くのパラメータを推定する必要が生じ、推定誤差が大きくなりやすいと想定される。一方、Chopra and Ziemba (1993) によれば、平均分散ポートフォリオにおいて、推定誤差がポートフォリオに及ぼす影響の大きさは、平均が分散の 10 倍程度、分散が相関の 2 倍程度とされており、多資産モデルによりリターン間の相関を整合的に推定するよりも、平均や分散の推定誤差を低く抑える方が、ポートフォリオ問題においては重要であると考えられる。そこで本稿では、資産リターン間の相関係数を、各期毎に過去一定期間の標本相関係数と定めた。

上記で導入したモデルに加え、期待リターンやボラティリティに関する状態変数の確率変動を考慮する事によるポートフォリオ・パフォーマンスへの影響を詳細に分析するため、より単純化した以下の 5 つのモデルについても考察対象とした。

- モデル 1 : SV(Stochastic Volatility)

((2.1) 式において、 $\mu_t \equiv 0$)

$$\begin{aligned}
 y_t &= \exp(x_t/2)\epsilon_t, & \epsilon_t &\sim N(0,1) \\
 x_t &= \bar{x} + \phi_x x_{t-1} + \sigma_x \xi_t, & \xi_t &\sim N(0,1)
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

- モデル 2 : CMCV(Constant Mean and Stochastic Volatility)

((2.1) 式において、 $\mu_t \equiv \bar{\mu}$)

$$\begin{aligned}
 y_t &= \bar{\mu} + \exp(x_t/2)\epsilon_t, & \epsilon_t &\sim N(0,1) \\
 x_t &= \bar{x} + \phi_x x_{t-1} + \sigma_x \xi_t, & \xi_t &\sim N(0,1)
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

³ このような非対称性を考慮した SV モデルについては、例えば Jacquier et al. (2004) や Yu (2005) を参照。

⁴ 多次元 SV モデルに関しては、例えば Asai et al. (2006) を参照。

- モデル 3 : RMSV(Rolling Mean and Stochastic Volatility)

((2.1) 式において, $\mu_t \equiv m_{t-1}$)

$$\begin{aligned} y_t &= m_{t-1} + \exp(x_t/2)\epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, 1) \\ x_t &= \bar{x} + \phi_x x_{t-1} + \sigma_x \xi_t, \quad \xi_t \sim N(0, 1) \end{aligned} \quad (2.4)$$

但し, m_{t-1} は資産リターンの固定期間 L の移動平均である.

- モデル 4 : SMCV(Stochastic Mean and Constant Volatility)

((2.1) 式において, $e^{x_t/2} \equiv \sigma_y$)

$$\begin{aligned} y_t &= \mu_t + \sigma_y \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, 1) \\ \mu_t &= \bar{\mu} + \phi_\mu \mu_{t-1} + \sigma_\mu \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, 1) \end{aligned} \quad (2.5)$$

- モデル 5 : SMRV(Stochastic Mean and Rolling Volatility)

((2.1) 式において, $e^{x_t/2} \equiv \sigma_{t-1}$)

$$\begin{aligned} y_t &= \mu_t + \sigma_{t-1} \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, 1) \\ \mu_t &= \bar{\mu} + \phi_\mu \mu_{t-1} + \sigma_\mu \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, 1) \end{aligned} \quad (2.6)$$

但し, σ_{t-1}^2 は資産リターンの固定期間 L の移動分散である.

これらのモデルに加えて, ポートフォリオ・パフォーマンスを評価する際のベンチマークとして, 期待リターンと分散をそれぞれ固定期間 L の移動平均・移動分散とするケースも考え, これを RMRV(Rolling Mean and Rolling Variance) と呼ぶことにする.

3 状態空間モデルと推定アルゴリズム

一般に, 前節で導入した, 資産の期待リターンやボラティリティに関する状態変数, μ_t, x_t を直接観測することはできない. そこで, モデルの推定のために一般化状態空間モデルの枠組みを導入する. 一般化状態空間モデルは, 次のように観測方程式とシステム方程式からなる.

$$\begin{aligned} Y_t &= H(Z_t, u_t) \quad [\text{観測方程式}] \\ Z_t &= F(Z_{t-1}, v_t) \quad [\text{システム方程式}] \end{aligned} \quad (3.7)$$

但し, Z_t は状態変数と呼ばれる観測できない変数のベクトルであり, Y_t は観測可能な変数のベクトルである. 関数 H, F は必ずしも線形とは限らない一般的な関数である. u_t, v_t はそれぞれ観測ノイズとシステムノイズを表す.

本稿では, μ_t, x_t と後述する θ_t が Z_t に, y_t が Y_t に対応しており, 各 (2.1)-(2.6) 式の, 第 1 式を観測方程式, 第 2 式以降と後述する (3.9) 式をシステム方程式とみなすことにより, 一般化状態空間モデルの枠組みが適用できる.

本稿では、基本的に Kitagawa (1996) によるモンテカルロ・フィルタ (Monte Carlo filter, MCF) を用いて状態推定を行う。まず、上記の状態空間表現を所与として、MCF のアルゴリズムは以下のように記述される。

モンテカルロ・フィルタのアルゴリズム

1. 状態変数ベクトルの初期値ベクトル $\{f_0^{(1)}, \dots, f_0^{(M)}\}$ を発生させる。但し、 M は粒子数とする。
2. 以下のステップ (a)~(d) を各時点 $t = 1, \dots, T$ に対して適用する。但し、 T はデータの最終時点を表す。

- (a) システムノイズ $v_t^{(j)}, j = 1, \dots, M$ を発生させる。
- (b)[1 期先予測] 各 $j = 1, \dots, M$ に対して、 $p_t^{(j)} = F(f_{t-1}^{(j)}, v_t^{(j)})$ を計算する。
- (c)[重み付け] 各粒子 $\{p_t^{(1)}, \dots, p_t^{(M)}\}$ の重みを尤度関数 $p(Y_t | p_t^{(j)})$, $j = 1, \dots, M$ により評価し、 $\alpha_t^{(j)}$, $j = 1, \dots, M$ とおく。
- (d)[再抽出] $\{f_t^{(1)}, \dots, f_t^{(M)}\}$ を $\{p_t^{(1)}, \dots, p_t^{(M)}\}$ から再抽出する。具体的には、各 $f_t^{(i)}$, $i = 1, \dots, M$ を $\{p_t^{(1)}, \dots, p_t^{(M)}\}$ の中から、

$$\text{Prob.}(f_t^{(i)} = p_t^{(j)} | Y_t) = \frac{\alpha_t^{(j)}}{\sum_{k=1}^M \alpha_t^{(k)}}, \quad j = 1, \dots, M$$

の確率に基づき再抽出する。

ここで、尤度 $L(\theta)$ は $p(Y_1 | Y_0) = p_0(Y_1)$ として、

$$L(\theta) = p(Y_1, \dots, Y_T | \theta) = \prod_{t=1}^T p(Y_t | Y_1, \dots, Y_{t-1}, \theta)$$

と表される。この対数尤度 $l(\theta)$ は、モンテカルロ・フィルタの枠組みでは、

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^T \left(\log \sum_{k=1}^M \alpha_t^{(k)} \right) - T \log M$$

により近似的に計算される。

未知パラメータの推定に関しては、パラメータ自体を状態変数に含めることにより、 $Z_t = (\mu_t, x_t, \theta_t)$ として同時に逐次推定する。その際パラメータを単に

$$\theta_t = \theta_{t-1} \tag{3.8}$$

と推移させると、すぐに一点に縮退し、初期分布から発生させた粒子に真値が含まれていない場合は誤推定されるので、人工的な正規乱数 z_t を加え、

$$\theta_t = \theta_{t-1} + z_t \tag{3.9}$$

と推移させる。このような枠組みは Kitagawa (1998) により「自己組織化状態空間モデル」として導入された。

このとき人工ノイズ z_t の分散を決める必要があるが⁵、本稿では、West (1993a,1993b) や Liu and West (2001) によるカーネル平滑化 (Kernel Smoothing, KS) と呼ばれる手法を採用した。カーネル平滑化法では、時刻 $t-1$ で条件づけられた未知パラメータ θ_t の条件付き分布を

$$p(\theta_t|y_{t-1}) \sim N(a\theta_{t-1} + (1-a)\bar{\theta}_{t-1}, (1-a^2)V_{t-1})$$

とする。但し、 $a = (3\delta - 1)/2\delta$ 。 $\bar{\theta}_t$ 、 V_t は、それぞれ θ_t を表す粒子の値の平均および分散を表し、 δ は収束に関するパラメータである。通常 0.95-0.99 とされるので、ここでは $\delta = 0.98$ とした。

なお、当該アルゴリズムを採用した背景は以下の通りである。よく知られているように、粒子フィルタのアルゴリズムは、各ステップにおいて一期先予測と再抽出の何れを先に行うかで2つに大別される。例えば、Gordon et al. (1993) や Kitagawa (1996) はまず一期先予測を行い次に再抽出するアルゴリズムを考案し、それらは各々ブートストラップ・フィルタ (Bootstrap filter, BF) やモンテカルロ・フィルタ (Monte Carlo filter, MCF) と呼ばれる。これに対し、Pitt and Shephard (1999) は、より効率的に状態を推定するため、再抽出を先に実行する補助粒子フィルタ (Auxiliary Particle filter, APF) を提案した。前述の Liu and West (2001) は、この APF に KS を組み合わせた新しいアルゴリズムを開発し、これは Liu and West filter (LWF) として知られている。本稿において我々が用いる粒子フィルタは、MCF に KS を組み合わせた手法として位置付けられよう。このアルゴリズムは、MCF に基づくため APF よりも実装が簡便である。また、Rios and Lopes (2013) の Markov Switching SV モデルに関する数値実験では、LWF と比して推定精度や計算負荷の面で遜色ないパフォーマンスを示しており、十分に有効な手法であると判断できる。

4 モデルの推定

4.1 データ

本稿では、2003年4月から2016年2月までの株式、債券、リートのトータルリターン (total return)・インデックスの月次データ (155期) を用いた⁵。資産リターン y_t は、各時点 t の資産価格データ P_t に対して、 $y_t = 100 \times (P_t/P_{t-1} - 1)$ として計算した。但し、日本株とJリート以外はドル建てであったため、対応する期間の月次ドル円為替データを用いて円建てに変換した⁶。表1、表2では、それぞれデータの名称とその基本統計量についてまとめた。表記の簡単化のため、以下では表1の「対応する資産」の名称をデータ名として用いる。なお、歪度と尖度はデータの標本平均を $\hat{\mu}$ 、不偏分散を $\hat{\sigma}^2$ として次のように計算した。

⁵ データソース：Bloomberg

⁶ つまり本稿では、為替ヘッジなしの国際分散投資を考察した。

$$\begin{aligned} \text{歪度} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\frac{y_t - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right)^3, \\ \text{尖度} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\frac{y_t - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right)^4 - 3. \end{aligned}$$

表 1: データ名

インデックス名	Bloomberg Ticker 名	対応する資産
東証株価指数	TPXDDVD.Index	日本株
東証リート指数	TPXDREIT.Index	J リート
S&P500	SPTR.Index	米国株
FTSE Developed ex North America Net Tax (US RIC) Index	TGPVAN33.Index	先進国株
Morgan Stanley REIT Index	RMS.G.Index	US リート
FTSE Emerging Total Return Index	FTS5ALEM.Index	途上国株
Barclays US Treasury 10 Year Term Index	BCEY4T.INDEX	米国債
JPMorgan Emerging Market Bond Index	JPEIGLBL.INDEX	途上国債券

表 2: 基本統計量

	平均	分散	歪度	尖度
日本株	0.602	27.873	-0.396	0.851
J リート	0.950	32.940	-0.204	3.488
米国株	0.816	27.894	-0.700	1.671
先進国株	0.785	34.743	-0.908	2.321
US リート	1.137	54.050	-0.920	5.951
途上国株	1.138	51.154	-0.826	2.609
米国債	0.433	6.666	-0.165	0.563
途上国債券	0.709	12.209	-1.472	8.536

4.2 推定方法

本稿では月次データを用いており、データ数が比較的少ない。そこで、推定の安定性を保証すべく、通常 5 千、1 万個程度とされる粒子数を 100 万個とした⁷。

⁷ 粒子数 100 万個としても各資産あたり数分程度で計算可能である。但し、Intel(R) Core(TM) i7-3970X CPU @ 3.5GHz 3.5GHz または、Intel(R) Xeon(R) CPU X5675 @ 3.07GHz 3.06GHz を使用した。

ポートフォリオ構築で用いる各資産の期待リターンおよびリターンの分散 (ボラティリティの二乗) の推定系列としては、資産リターンの一期先予測分布の平均と分散を利用した。但し、 t 時点における一期先予測分布の平均は、状態変数 $\mu = \{\mu_s : s \geq 0\}$ の t 時点における一期先予測 μ_{t+1} そのものではなく、同様に、その分散は、状態変数 $x = \{x_s : s \geq 0\}$ の t 時点における一期先予測より計算される $e^{x_{t+1}}$ と必ずしも等しくはないことには注意を要する。また、2 節で述べた理由により、各モデルの状態変数とパラメータは各資産毎に個別推定し、資産リターン間の相関係数は、各期毎に過去一定期間 (ここでは過去 2 年=24 期) の標本相関係数と定めた (標本相関係数の推定結果については p.33 の図 20 を参照)。

尚、本稿では、状態変数ベクトル Z 、観測値 (資産のリターン) ベクトル $Y = y$ として、観測値ベクトルの一期先予測分布 $p(y_{t+1}|y_t)$ を以下のように計算した。まず、

$$p(y_{t+1}|y_t) \propto p(y_{t+1}|Z_t)p(Z_t|y_t) = p(y_{t+1}|Z_{t+1})p(Z_{t+1}|Z_t)p(Z_t|y_t) \quad (4.10)$$

であることは容易に分かる。ここで、 $p(Z_t|y_t)$ は t 期のフィルタ分布なので、3 節の「モンテカルロ・フィルタのアルゴリズム」の (b) と (c) の間に以下に記す (b'), (b'') を加えることにより、リターンの一期先予測分布 $p(y_{t+1}|y_t)$ をモンテカルロ・シミュレーションに基づき近似可能である。

即ち、 t 時点において、アルゴリズムのステップ 2.(d) により分布 $p(Z_t|y_t)$ からの標本である $\{f_t^{(j)}\}_{j=1,2,\dots,M}$ が得られているとすれば、ステップ (a), (b), (b'), (b'') は次のとおりである。

- (a) システムノイズ $\{v_{t+1}^{(j)}\}_{j=1,\dots,M}$ を発生させる。
- (b)[1 期先予測] 各 $j = 1, \dots, M$ に対して、 $p_{t+1}^{(j)} = F(f_t^{(j)}, v_{t+1}^{(j)})$ を計算する。ここで、 $p_{t+1}^{(j)}$ は分布 $p(Z_{t+1}|Z_t)$ からの標本と見做せる。
- (b') 観測ノイズ $\{u_{t+1}^{(j)}\}_{j=1,\dots,M}$ を発生させる。
(一般的には、 $\{u_{t+1}^{(j)}\}_{j=1,\dots,M}$ は、 $\{v_{t+1}^{(j)}\}_{j=1,\dots,M}$ と相関を持つ。)
- (b'') 各 $j = 1, \dots, M$ に対して、観測方程式 $H(\cdot, \cdot)$ を用い、 $y_{t+1}^{(j)} = H(p_{t+1}^{(j)}, u_{t+1}^{(j)})$ を計算する。但し、 $y_{t+1}^{(j)}$ は分布 $p(y_{t+1}|Z_{t+1})$ からの標本と見做せる。

このリターンの一期先予測分布 $p(y_{t+1}|y_t)$ の近似において得られた粒子 $\{y_t^{(j)}\}_{j=1,\dots,M}$ の平均と分散を計算することにより、期待リターンおよびリターンの分散の推定系列が得られるが、その予測分布は SV モデルの下では正規分布ではないため、歪度と尖度も算出することとした。

モデルの統計的なあてはまりに関しては、赤池情報量基準 (AIC) により評価した。AIC は、3 節で述べたモンテカルロ・フィルタのアルゴリズムから得られる対数尤度を用い、以下のように定義される。

$$AIC = -2l(\theta) + 2(\text{パラメータの数})$$

この値が小さいほど、相対的に良いモデルと判断される。但し、本分析における「パラメータの数」は自己組織化で推定されたパラメータ数とし、2 節のモデル 3 で導入した移動平均 (m_{t-1})、モデル 5 で導入した移動分散 (σ_{t-1}^2) はパラメータ数としてはカウントしていない。

また、リターンの予測精度については、以下の式で定義される、リターンの予測値 y_t^{pred} と実現値 y_t の平均二乗誤差 (Mean Square Error, MSE) によって評価した。

$$MSE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (y_t - y_t^{pred})^2$$

但し、 y_t^{pred} は $t-1$ 時点に得られる一期先予測分布の平均である。

本稿では、フィルタリングの開始時点の2年後を運用開始時点と設定する。これに伴い、RMRV(移動平均・移動分散)やRMSV((2.4)式), SMRV((2.6)式)において用いる移動平均・分散の固定期間 L は2年、すなわち24期とする。従って、パラメータ推定のプロットや尤度計算などは、基本的に24期以降を対象とした。

4.3 推定結果

12, 13 ページで示す図において、図 1-7 では、日本株について SMSV モデル ((2.1) 式) に関するパラメータの推定系列をプロットし、図 8-11 では、同様に日本株について、SMSV モデルに対するリターンの一期先予測分布の平均、ボラティリティ、歪度、尖度をプロットした。(尚、図 8, 図 9 の表題では、各々、平均は期待リターン、標準偏差はボラティリティと記している。)

なお、状態の初期値は定常分布から発生させた。状態変数 μ_t, x_t の定常分布はそれぞれ $N(\bar{\mu}/(1-\phi_\mu), \sigma_\mu^2/(1-\phi_\mu^2))$, $N(\bar{x}/(1-\phi_x), \sigma_x^2/(1-\phi_x^2))$ である。SMSV モデルのパラメータの初期分布は $\bar{\mu} \sim U(-2, 2)$, $\bar{x} \sim U(-1, 1)$, $\phi_\mu \sim U(0.8, 1)$, $\phi_x \sim U(0.8, 1)$, $\sigma_\mu \sim U(0, 6)$, $\sigma_x \sim U(0, 1)$, $\rho \sim U(-1, 1)$ とし、パラメータの推定値としては各時点のパラメータに関する粒子の平均を用いた。但し、 $U(a, b)$ は区間 (a, b) の一様分布を表す。

また、各資産ごとの MSE とその合計を表 3 に、各資産ごとの AIC を表 4 に示した。尚、AIC を求める際のパラメータ数としては、 m_{t-1}, σ_{t-1} に関しては0個、 $\bar{\mu}, \bar{x}$ に関しては1個として加算した。

表 3: MSE

	RMRV	SV	CMSV	RMSV	SMCV	SMRV	SMSV
日本株	30.75	30.07	30.63	30.84	29.96	29.64	30.05
Jリート	38.46	36.75	37.35	38.99	36.46	35.58	33.53
米国株	31.58	31.92	30.79	31.75	30.92	30.40	31.15
USリート	40.25	39.14	38.95	40.52	38.73	37.97	38.61
先進国株	63.33	62.98	61.20	64.50	62.73	61.83	62.21
途上国株	59.20	56.66	57.62	59.34	56.56	56.37	56.95
米国債	6.63	6.83	6.65	6.65	6.84	7.13	7.08
途上国債券	13.89	13.88	13.45	14.06	13.90	14.44	13.95
合計	284.10	278.22	276.64	286.65	276.08	273.37	273.53

表 4: AIC

	SV	CMSV	RMSV	SMCV	SMRV	SMSV
日本株	833.38	834.83	834.47	827.58	830.42	837.80
Jリート	840.74	835.92	839.67	853.40	840.91	832.92
米国株	830.92	824.05	827.94	836.55	824.23	831.58
USリート	848.13	839.78	848.78	868.54	851.39	848.94
先進国株	891.69	882.86	886.74	929.10	904.59	891.35
途上国株	900.67	896.67	898.67	911.82	904.90	903.89
米国債	628.91	627.38	624.89	634.52	644.68	639.51
途上国債券	716.12	708.29	712.06	726.84	733.82	720.96
パラメータ数	4	5	4	4	3	7

まずパラメータの推定結果について述べる。図 1-7 が示すように、全体としてパラメータの推定系列は安定している。図 4 から、ボラティリティの持続性 (time persistency) や平均回帰速度 (mean reversion speed) を表す ϕ_x は、全ての資産に関して、1 に近い値として推定されており、ボラティリティ・クラスタリング (volatility clustering) としてよく知られている現象が確認された。また、図 7 に着目すると、リターンとボラティリティの相関 ρ に関しては、Jリート以外では基本的に負と推定されており、レバレッジ効果が確認できる⁸。

次に、4.2 節で説明した一期先予測分布の推定結果について、考察する。2 節で我々は期待リターンを表現するため、状態変数 μ_t を確率過程として取り入れた SV モデル、即ち SMSV モデル ((2.1) 式) を提案したが、このモデリングにおいては、資産リターンのボラティリティが、状態変数 x_t で

⁸ 但し、パラメータの真値が既知のシミュレーション実験においては、 ρ の推定値は他のパラメータの推定値に比べ収束が遅かった。一方、詳細は省くが、5 節で分析するポートフォリオ・パフォーマンスに関しては、 ρ の影響が軽微であることを確認した。

図 1: $\bar{\mu}$

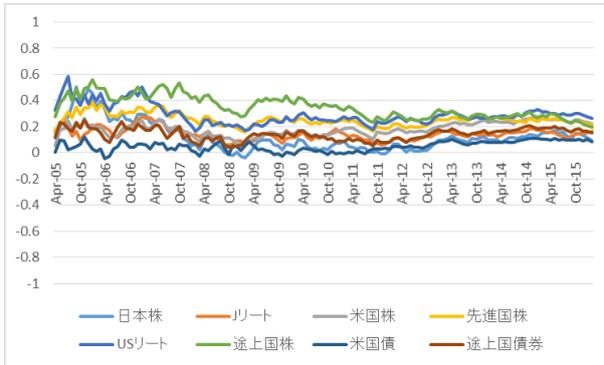


図 2: \bar{x}

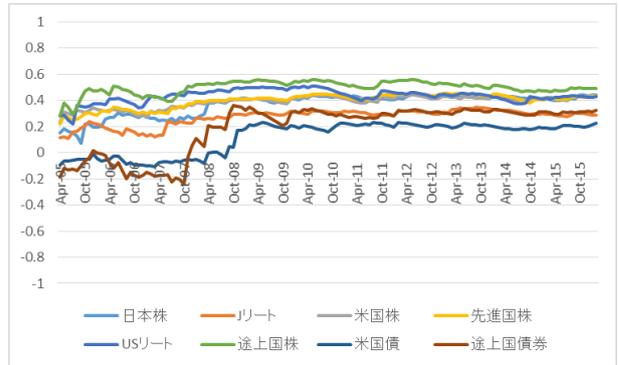


図 3: ϕ_{μ}

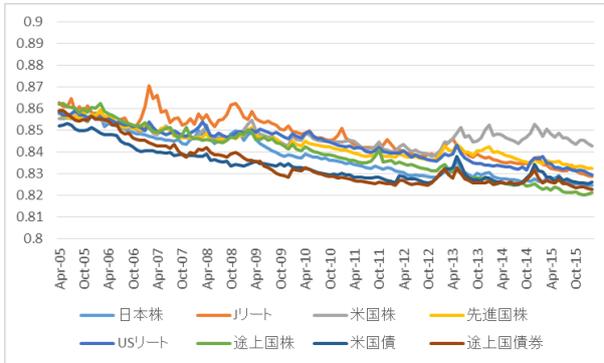


図 4: ϕ_x

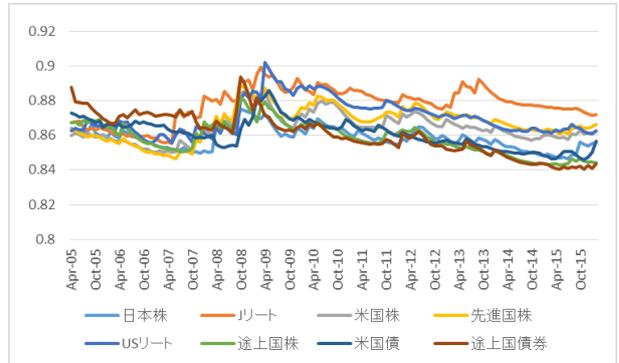


図 5: σ_{μ}

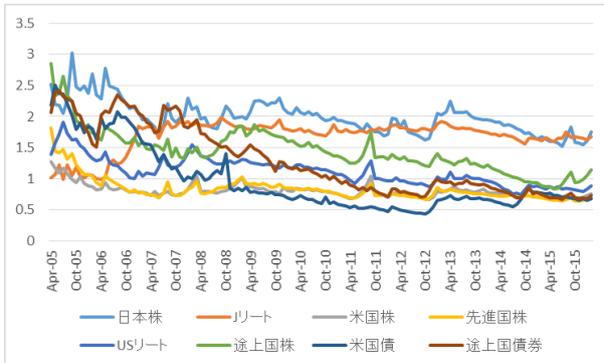


図 6: σ_x

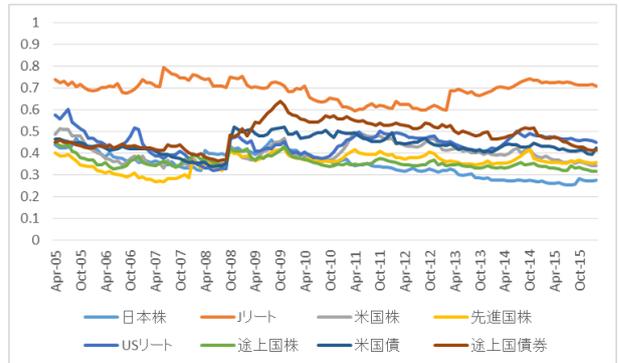


図 7: ρ

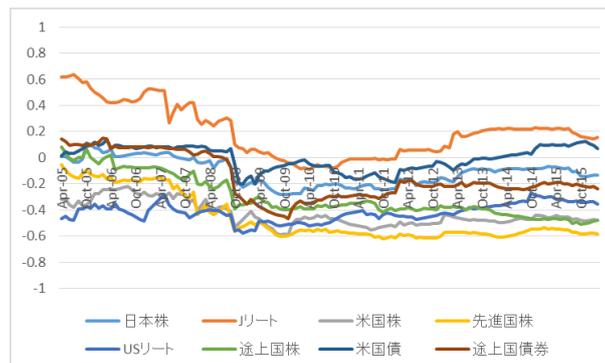


図 8: 期待リターン (日本株)

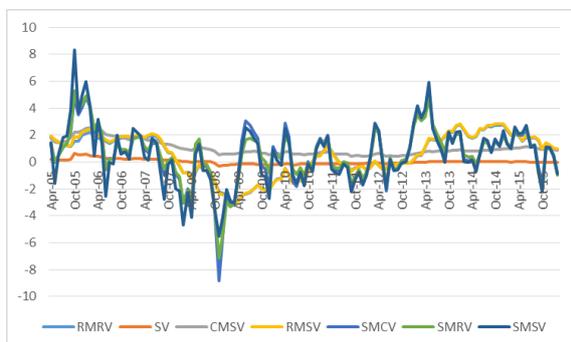


図 9: ボラティリティ (日本株)

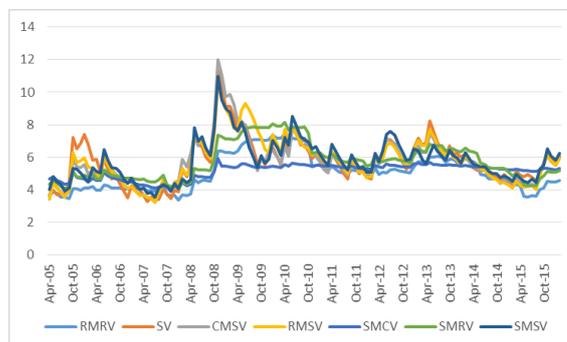


図 10: 歪度 (日本株)

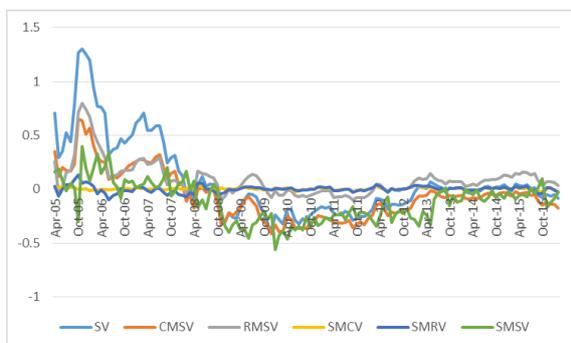
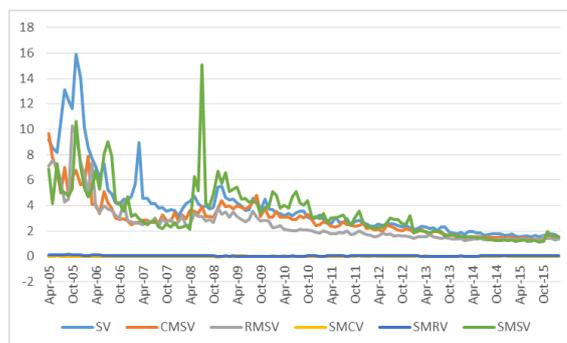


図 11: 尖度 (日本株)



はななく状態変数 μ_t のボラティリティ σ_μ により説明されるという, x_t と μ_t の識別性の問題が生じ得る. しかし図 9 から, ボラティリティの推定系列は, 基本的に期待リターンに関する状態変数 μ_t のモデルに依らず, ボラティリティに関する状態変数 x_t のモデルにより決まることが見て取れる. 同様に図 8 は, 期待リターンの推定系列が, x_t に依らず, μ_t のモデルにより決まることが示している. 従って, 両者の間には十分な識別性が確保されていると言えよう.

図 10 および図 11 から, SV を仮定しているモデルでは, 裾の厚い (fat tailed) 一期先予測分布が推定されていることが分かる. またリーマンショック以降の一定期間, 特に SMSV モデル ((2.1) 式), SV モデル ((2.2) 式), CMSV モデル ((2.3) 式) において, 比較的大きな負の歪度が推定されている.

リターン予測の MSE に関しては, 期待リターンに関する状態変数 μ_t のモデルにより以下の三種類に大別して分析する.

- (i) μ_t を確率的にしたモデル: SMSV((2.1) 式), SMCV((2.5) 式), SMRV((2.6) 式)
- (ii) μ_t を移動平均としたモデル: RMSV((2.4) 式), RMRV(移動平均・移動分散)

(iii) μ_t を定数としたモデル：CMSV((2.3) 式), SV((2.2) 式)

表 2 から、全体的な傾向として、(i) の MSE が最も小さく、(ii) の MSE が最大であることが分かる。この結果から、まず、期待リターンに関する状態変数 μ_t を確率的にしたことによりリターンの予測精度が向上したことが分かる。しかし一方で、 μ_t を移動平均とした (ii) のケースより、定数とした (iii) の MSE が小さいという結果は、リターン予測の困難性を指摘する数々の研究 (例えば Goyal and Welch (2008)) と整合的である。

最後に AIC であるが、これは概ね CMSV が低く、SMCV が高い傾向にある。なお、AIC と MSE の間に明確な関係性を見出すことはできなかった。

5 ポートフォリオの構築

5.1 設定

本稿では、投資家が一期先リターンの平均と分散の推定値を所与として最適ポートフォリオを構築する状況を考える。すなわち、投資機会の変動を考慮しない、近視眼的 (myopic) な投資家を想定する。さらに、市場には金利がゼロの安全資産が存在することを仮定する。最適ポートフォリオとしては、平均分散ポートフォリオ、リスクパリティ、最小分散、等ウェイトを対象とし、現実的な国際分散投資を考察するため、空売りはできないものとした。

平均分散ポートフォリオは、以下の ω_t に関する最適化問題の解 ω_t^* として定義される。

$$\max \mu_t' \omega_t - \frac{\gamma}{2} \omega_t' \Sigma_t \omega_t \quad s.t. \quad \omega_t \geq \mathbf{0}, \omega_t' \mathbf{1} \leq 1 \quad (5.11)$$

但し、 μ_t, Σ_t はそれぞれ時点 t における $y_{t+1} = (y_{t+1}^1, \dots, y_{t+1}^n)'$ の条件付き期待値ベクトル及び共分散行列である。また $\omega_t = (\omega_t^1, \dots, \omega_t^n)'$ は時点 t から $t+1$ にかけての危険資産への投資比率ベクトルを表し、安全資産の投資比率は $1 - \omega_t' \mathbf{1}$ で与えられる。なお、 $'$ は転置、 $\mathbf{1}, \mathbf{0}$ はそれぞれ全要素が 1, 0 の列ベクトルを表す。またリスク回避度を表す γ については、結果の頑健性を確保するため、 $\gamma = 1, 2.5, 5, 10, 20, 50$ と多様なケースに関して試算した。

次に、Maillard et al. (2010) に始まるリスクパリティ (Risk Parity, RP) ポートフォリオの投資比率 ω_t^* は以下で定義される⁹。

$$\omega_t^* = \{ \omega_t \in [0, 1]^n ; \sum_{i=1}^n \omega_t^i = 1, \omega_t^i \cdot (\Sigma_t \omega_t)_i = \frac{1}{n} \omega_t' \Sigma_t \omega_t \quad i = 1, \dots, n \} \quad (5.12)$$

但し、 n 次元ベクトル a に対して $(a)_i$ は i 番目の要素を表す。

つまりこのポートフォリオは、各資産のボラティリティの、ポートフォリオ全体のボラティリティへの寄与を一定とするものである。直感的には、ボラティリティの高い資産および他資産との相関の高い資産への投資比率を下げ、低い資産への投資比率を上げるポートフォリオと言えよう。

⁹ 例えば Bruder and Roncalli (2012) を参照。

最後に、最小分散ポートフォリオを以下の ω_t に関する最適化問題の解 ω_t^* として定義する。

$$\min \omega_t' \Sigma_t \omega_t \quad s.t. \quad \omega_t \geq \mathbf{0}, \omega_t' \mathbf{1} \leq 1 \quad (5.13)$$

こうしたポートフォリオ戦略を実行するに際しては、投資比率の組換え時に生じる取引費用が実務的には重要である。そこで、まず平均分散ポートフォリオに関しては、(5.12) に組換えに伴うペナルティを考慮した以下の最適化問題を考える。

$$\max \mu_t' \omega_t - \frac{\gamma}{2} \omega_t' \Sigma_t \omega_t - \sum_{i=1}^n c_i |\omega_t^i V_t - \omega_{t-1}^i V_{t-1} (1 + y_t^i)| \quad s.t. \quad \omega_t \geq \mathbf{0}, \omega_t' \mathbf{1} \leq 1 \quad (5.14)$$

但し、 V_t は時点 t におけるポートフォリオ価値で、 c_i は資産 i の購入・売却にかかる取引費用率であり、取引費用は資産 i の購入・売却額にこの c_i を乗じた額だけ発生する。本稿では全ての資産に関して一律に 10 bp であるとした。なお、時点 t において生じる取引費用は、上式のペナルティ部分、すなわち

$$\sum_{i=1}^n c_i |\omega_t^i V_t - \omega_{t-1}^i V_{t-1} (1 + y_t^i)| \quad (5.15)$$

にあたるが、これは次のように考えて算出している。

いま時点 t から $t+1$ にかけての資産 i への投資比率を ω_t^i としているので、時点 t における組換え後の資産 i の保有額は $\omega_t^i V_t$ で、組換え前の保有額は $\omega_{t-1}^i V_{t-1} (1 + y_t^i)$ となると考えられる。従って、時点 t の組換え時に生じる資産 i の追加的な購入・売却の金額は、 $|\omega_t^i V_t - \omega_{t-1}^i V_{t-1} (1 + y_t^i)|$ となる。ゆえに、この資産 i の購入及び売却額に取引費用率 c_i を乗じた額が、資産 i に関する取引費用として発生するので、それらを i に関して合算すればよい。なお、ポートフォリオ価値過程 V_t 及びポートフォリオリターン R_t は、以下のように定義した。

$$V_{t+1} = V_t (1 + \omega_t' y_{t+1}) - \sum_{i=1}^n c_i |\omega_t^i V_t - \omega_{t-1}^i V_{t-1} (1 + y_t^i)|, \quad V_0 = 1, \quad (5.16)$$

$$R_{t+1} \equiv \frac{V_{t+1}}{V_t} - 1$$

リスクパリティや最小分散に基づくポートフォリオに関しては、取引費用とは無関係に投資比率を計算した後に、ポートフォリオ価値を上式により算出した¹⁰。

ポートフォリオ・パフォーマンスを評価する指標としては、以下で説明する複利リターン (Cumulative Return), シャープ・レシオ (Sharpe Ratio), ソルティノ・レシオ (Sortino Ratio), 最大ドローダウン (Maximum Draw Down) を用いた。なお、最大ドローダウン以外は年率換算した。

- 複利リターン：ここでは、上で定義したポートフォリオリターン R_t を用いて、複利リターン CR を以下のように定める。

$$CR \equiv \left\{ \prod_{t=1}^T (1 + R_t) \right\}^{\frac{1}{T}} - 1 \quad (5.17)$$

¹⁰ なお、本稿では安全資産に関しては取引費用が生じないと仮定している。

- シャープ・レシオ：ポートフォリオの超過リターンをリターンの標準偏差で除して計算される。なお、分子に用いる超過リターンとしては、ポートフォリオリターン R_t の算術平均を用いた。
- ソルティノ・レシオ：シャープ・レシオに関して実務的に指摘される欠点としては、ポートフォリオ価値の上昇時の変動もリスクとして捉え、マイナスに評価することが挙げられる。この点を改善したのがソルティノ・レシオである。ソルティノ・レシオは、ポートフォリオ価値の減少時の変動のみをリスクとして捉え、マイナスに評価する。具体的には、シャープ・レシオの分母を以下で定義される下方リスク DR に換えた指標である。

$$DR \equiv \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \min(0, R_t)^2} \quad (5.18)$$

- 最大ドローダウン：ドローダウンは、現時点 t においてポートフォリオ価値が過去の最高水準からどの程度下落したかを表す。つまり最大ドローダウン MDD は以下のように定義される。

$$MDD \equiv \max_{1 \leq t \leq T} \frac{M_t - V_t}{M_t}, \quad M_t \equiv \max_{1 \leq s \leq t} V_s \quad (5.19)$$

一般に、ポートフォリオ・パフォーマンスは投資タイミングに強く依存するので、ある投資期間 $[0, T]$ を所与とすれば、その期間内においては投資タイミングに依存しない評価を与える最大ドローダウンは、パフォーマンス分析の信頼性向上に寄与すると考えられる。

5.2 ポートフォリオ・パフォーマンス

本節では、ポートフォリオ・パフォーマンスについて分析する。まず5.2.1節では、前節の設定に基づき構築された各ポートフォリオのパフォーマンスを分析する。5.2.2節では、より実務的な実行可能性を考慮して、空売り制約に加え投資比率の上限や変化に制約を課したケースを扱う。尚、前者のケースも空売りを禁止しているという点では制約付きのポートフォリオと言えるが、便宜上、前者のケースを「制約なしポートフォリオ」、後者のケースを「制約付きポートフォリオ」と記すことにする。また、以下の図表は23ページ以降にまとめて掲載する。

5.2.1 制約なしポートフォリオ

表5、表6、表7はそれぞれ平均分散、リスクパリティ、最小分散のポートフォリオ・パフォーマンスをまとめた表である。また、平均分散ポートフォリオの場合、各リスク回避度がどの程度の水準のポートフォリオ・ボラティリティに対応するのかが不明確であるため、ポートフォリオ・ボラティリティも表8に記載した。更に図12では、リスク回避度 $\gamma = 2.5, 20$ の平均分散ポートフォリオのポートフォリオ価値 V_t の推移を示した。但し、ポートフォリオ価値は初期時点で1としている。

表5によれば、平均分散ポートフォリオに関して、SMSV モデルは全てのリスク回避度および全てのパフォーマンス指標において、ベンチマークである RMRV(移動平均・分散) を大きく凌駕している。これは、ポートフォリオ価値の推移を示した図 12 を確認すればより明瞭であり、SMSV モデルに基づくポートフォリオは、10 年以上に及ぶ投資期間に渡って、上昇局面のリターンが大きく、下降局面でのドロウダウンが小さい、良好な運用成果を挙げ続けている。表 6 や表 7 よりリスクパリティや最小分散ポートフォリオと比較しても、SMSV モデルの平均分散ポートフォリオのパフォーマンスが優れている事が分かる。

また表5を詳細に分析すると、まず期待リターンに関する状態変数 μ_t を確率過程とした SMCV, SMRV, SMSV モデルは、MSE の向上に対応して、全体的に高いパフォーマンスを挙げている事が確認できる。その中でも SMSV は特に優れたパフォーマンスを示しているが、状態変数 x_t のモデルの違いがこれら 3 つのモデルのパフォーマンスに優劣をもたらしていると考えられる¹¹。つまり、 x_t のモデルを定数や移動分散から SV にすることで、ポートフォリオ・パフォーマンスは顕著に改善されている。但し一方で、 μ_t を移動平均で与えた RMRV と RMSV の比較においては、 x_t のモデルを SV にした効果は殆ど確認できず、 μ_t も確率過程として推定することが決定的な差異をもたらしたと思われる。

こうした考察を裏付ける具体的な事例としては、リーマンショックの時期(2008 年 9 月前後)が挙げられる。図 9 から、この時期における SV を仮定したモデルのボラティリティの推定系列が、同時に急上昇していることが分かる。しかし、図 13 で SMSV と CMSV のリーマンショック前後の投資比率を比較すると、SMSV の方が一期先んじて安全資産への投資比率を上げている。これは、図 8 が示すように、このタイミングで SMSV モデルによる期待リターンの推定系列が急激にマイナスへと転じたことに起因しており、ボラティリティと同時に期待リターンに関する状態変数も確率過程にすることの重要性を示唆する一例と言える。

以上の考察をまとめると、期待リターンに関する状態変数 μ_t とボラティリティに関する状態変数 x_t を共に確率過程としてモデル化することで、ボラティリティの動的変化と整合的なリターン予測が可能となり、ベンチマークを大きく上回るポートフォリオ・パフォーマンスが実現されたと結論付けられよう。

一方、表 6 および表 7 から、リスクパリティや最小分散ポートフォリオにおいては、モデルの相違がパフォーマンスに大きな影響を与えていないことが分かる。推定手法や推定誤差の影響を受けにくい事が、ボラティリティのみに基づく戦略が導入された一つの理由であり、本稿の検証でも、それが裏付けられたと言える。

AIC や MSE と平均分散ポートフォリオのパフォーマンスの関係についても考察しておく。まず AIC については、4.3 節で CMSV モデルが全体的にあてはまりが良かったという結果が得られていたが、CMSV モデルのパフォーマンスは、ベンチマークの RMRV モデルを明確に上回ることはなかった。さらに、最も高いポートフォリオ・パフォーマンスを示した SMSV モデルの AIC が優れていたわけでもない。従って、今回のデータ分析においては、モデルの統計的なあてはま

¹¹ 4.3 節の考察から、期待リターンに関する状態変数 μ_t のモデルが共通していれば、 x_t のモデルに依らず、類似した期待リターンの推定系列が得られていたことに注意。

りの良さを表す AIC とポートフォリオ・パフォーマンスとの間に明確な関係は観測されなかった。MSE については、MSE が優れていた 3 つモデル (SMCV, SMRV, SMSV) のパフォーマンスが全体的に高かった事から、リターンの予測精度とポートフォリオ・パフォーマンスとの間にある程度関係性が見られた。但し、ポートフォリオはボラティリティ推定の影響も受けており、必ずしも MSE のみでモデルのパフォーマンスを判断することはできない点に注意を要する。

ポートフォリオ戦略の相違がパフォーマンスに与える影響を分析するため、図 15 により、平均分散、リスクパリティ、最小分散の 3 つのポートフォリオの年次リターン及び年次ボラティリティの推移を確認する¹²。全体的な傾向としては、ボラティリティのみに依存するリスクパリティ及び最小分散は比較的類似したパフォーマンスを示す一方、平均分散ポートフォリオはそれらとは大きく異なるパフォーマンスを示している。具体的には、リターン (棒グラフ) については、リスク回避度 γ に依らず、平均分散ポートフォリオはリスクパリティや最小分散ポートフォリオに比べて、2007、2008 年でのドローダウンが抑制されており、2005、2006、2012 年でリターンを大きく上げていることが分かる。また、ボラティリティ (折れ線グラフ) については、リスク回避度 γ の高い平均分散ポートフォリオに関しては、時期によってはリスクパリティや最小分散よりも低くなっている。

これらの相違を分析するため、各ポートフォリオ戦略の投資比率を確認する。図 15 では、SMSV、RMRV モデルとリスク回避度 $\gamma = 2.5, 20, 50$ の平均分散ポートフォリオの投資比率の推移を示し、図 16 では、RMRV モデルに基づくリスクパリティ、最小分散ポートフォリオの投資比率の推移を示した。図 15、16 によると、リスクパリティと最小分散ポートフォリオは、投資比率変動が小さく最低でも 4 資産以上に分散投資されている一方、平均分散ポートフォリオは、少数の資産に集中投資しており、特に SMSV モデルは投資対象を頻繁に変えている。一般に、少数資産への集中投資は平均分散ポートフォリオの欠点として指摘されており¹³、実際に通常の RMRV では、期待リターンの推定精度の低さが原因となり極端なドローダウンが生じている (表 5)。しかし、図 14 や図 16 が示す通り、安定した分散投資を行っているリスクパリティや最小分散に関しても、2008 年のリーマンショック前後の時期における大きなドローダウンを回避できていない。急激な下降局面においては、資産リターン間の相関が上昇し (図 20)、殆どの危険資産のリターンは同時にマイナスに転じる。従って、安全資産へ投資できないこれらの戦略では、分散投資を行っても下方リスクは軽減されないのである。一方、SMSV に基づく平均分散ポートフォリオは、粒子フィルタによりボラティリティの上昇だけでなく期待リターンの減少が検知され、早期の段階で危険資産から安全資産への集中投資に切り替わっており、これがドローダウンの抑制に大きく貢献している。また、2005、2006 年、2012 年においては、各期毎に上昇が検知された危険資産へと集中投資することでリスクパリティや最小分散ポートフォリオを遥かに凌ぐリターンを上げている。その

¹² 但し、平均分散ポートフォリオに関しては、粒子フィルタによるリターン予測の影響を見るために SMSV モデルに基づいたポートフォリオを選び、リスクパリティや最小分散ポートフォリオに関しては、モデルによりパフォーマンスに大きな差がつかない点を考慮し、より実務で一般的に用いられる RMRV モデルに基づいたポートフォリオを選択した。

¹³ 例えば、Braga (2016) を参照。

際、集中投資の対象となる危険資産自体は、各資産への一年毎の平均投資比率を計算した図 17 が示す通り、幅広く分散されている。以上の事実から、粒子フィルタを利用し適切なタイミングで適切な資産に集中投資を行うことで、安定した分散投資より優れたパフォーマンスを發揮できることが分かる。

但し、取引規約や売買執行等の実務的観点からは、対象資産によっては投資比率の変化が激しい取引を実施するには困難を伴うことが懸念される。一つの解決法として、各資産への投資比率に制約を課すことが知られている。

5.2.2 制約付きポートフォリオ

本小節では、より現実に即したポートフォリオ問題を考察するため、平均分散ポートフォリオの投資比率 ω_t に下記の制約を課したポートフォリオを試算し、そのパフォーマンスを表 9 に、投資比率を図 18 にまとめた¹⁴。尚、これらは危険資産への投資比率に対する制約である。

$$\begin{aligned} |\omega_t^i - \omega_{t-1}^i| &\leq 1/3 && \text{[制約 1]} \\ 0 \leq \omega_t^i &\leq 1/3 && \text{[制約 2]} \end{aligned} \tag{5.20}$$

まず SMSV モデルに注目して制約 1 と制約 2 を比較すると、複利リターンについては制約 1 の方が高くなる一方、シャープ・レシオやソルティノ・レシオは制約 2 の方が高く、最大ドローダウンも制約 2 の方が低くなっている。この理由としては、まず制約 1 の下では、期待リターンの最も高い資産への集中投資が進むため、粒子フィルタの検知力が活かされ複利リターンが高くなることが挙げられる。これに対し制約 2 の下では、安全資産への投資がない場合でも、最低三資産へ投資対象が分散されるためリスクが抑制される。更に、相場が上昇から下降に転じる局面では、投資比率の変化幅を制限する制約 1 は、危険資産から安全資産への切り替えに時間を要するが、制約 2 は即座に切り替え可能であり、これがドローダウンの低下に寄与していると考えられる。RMRV の場合については、特に複利リターンと最大ドローダウンに注目すると、制約 1,2 の下である程度類似した傾向が観測される。

次に、制約なしの場合と制約付きの場合(制約 1 及び制約 2)を比較する。表 9 によれば、RMRV は、制約を課すことにより必ずしもパフォーマンスが低下してはいないが、SMSV は、制約を課した場合には全体としてパフォーマンスが低下していることが分かる。この傾向は、複利リターンにおいて特に顕著に現れ、SMSV が制約を課したことにより大きくパフォーマンスを落としているのに対し、RMRV はむしろ制約 1 を課すことで複利リターンが上昇している。これは、我々の手法に基づくリターン予測の有効性と、通常の移動平均によるリターン予測の困難性を示唆している。但し、制約 2 においては、SMSV に基づくポートフォリオのシャープ・レシオやソルティノ・レシオ、最大ドローダウンが、リスク回避度が高い場合に改善を示すことがある。これは、上記の通り制約 2 の下では投資対象が分散されやすいためと考えられる。

¹⁴ 但し、制約 1 を課す場合の初期時点の投資比率は、 $\omega_0^i \geq 0$ の下で計算した。

尚、SMSV モデルに基づくポートフォリオは、投資比率の上限や変化に現実的な制約を課した場合でも、制約を課さないベンチマーク (RMRV) を凌駕するパフォーマンスを示しており、我々の提案する手法の有効性は保たれていると言えよう。しかし当然ではあるが、制約をより厳しくすると、粒子フィルタの検知力が活かされずパフォーマンスは低下する。例えば、制約 1 において変化幅 1/10 のケースを試算したところ、投資比率の変化はなだらかになるが (図 19)、ベンチマーク (RMRV) と同程度のパフォーマンスしか得られなかった (表 10)。

6 結論

本稿では、自己組織化状態空間モデルの枠組みを用い、カーネル平滑化法を活用したモンテカルロ・フィルタにより、良好な運用成果を示す平均分散ポートフォリオが構築できることを示した。投資対象としては、国内外の株式・債券とリートを取り入れ、空売り禁止条項や取引費用、投資比率制約も考慮することで、より現実的な国際分散投資を考察した。特に本稿では、レバレッジ効果を伴うボラティリティに加え期待リターンに関する状態変数も導入し、粒子フィルタにより逐次推定した。さらに、我々の手法に基づくポートフォリオのパフォーマンスは、一般的な移動平均・分散に基づく平均分散ポートフォリオだけではなく、近年注目されている等ウェイト、最小分散、リスクパリティなどのリターン予測に依拠しない手法のパフォーマンスをも大きく凌駕することを示した。また、運用成果の評価方法に関しては、実務的に重要な下方リスクや投資タイミングの問題も考慮し、周知の複利リターンやシャープ・レシオの他、ソルティノ・レシオや最大ドローダウンといった有用な指標も採用し、我々の提案したモデルと推定の枠組みによるリターン予測が有効であることを多角的に確認した。

参考文献

- [1] Aguilar, O. and West, M.(2000). Bayesian dynamic factor models and variance matrix discounting for portfolio allocation. *Journal of Business and Economic Statistics*, 18, 338-57.
- [2] Akaike, H. (1992). Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. In *Breakthroughs in statistics* (pp. 610-624). Springer New York.
- [3] Asai, M., McAleer, M., & Yu, J. (2006). Multivariate stochastic volatility: a review. *Econometric Reviews*, 25(2-3), 145-175.
- [4] Braga, M, D, (2016). *Risk-Based Approaches to Asset Allocation*. SpringerBriefs in Finance
- [5] Bruder, B., & Roncalli, T. (2012). Managing risk exposures using the risk budgeting approach. Available at SSRN 2009778.
- [6] Chib, S., Nardari, F., & Shephard, N. (2006). Analysis of high dimensional multivariate stochastic volatility models. *Journal of Econometrics*, 134(2), 341-371.
- [7] Chopra, V. K., & Ziemba, W. T. (1993). The effect of errors in means, variances, and covariances on optimal portfolio choice. *Journal of Portfolio Management*, Winter 1993, 19, 2
- [8] Danthine, J. P., & Donaldson, J. B. (2014). *Intermediate financial theory*. academic press.
- [9] Gordon, N. J., Salmond, D. J., & Smith, A. F. (1993, April). Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation. In *Radar and Signal Processing, IEE Proceedings F* (Vol. 140, No. 2, pp. 107-113). IET.
- [10] Jacquier, E., Polson, N. G., & Rossi, P. E. (2004). Bayesian analysis of stochastic volatility models with fat-tails and correlated errors. *Journal of Econometrics*, 122(1), 185-212.
- [11] Johannes, M., Korteweg, A., & Polson, N. (2014). Sequential learning, predictability, and optimal portfolio returns. *The Journal of Finance*, 69(2), 611-644.
- [12] Kantas, N., Doucet, A., Singh, S. S., Maciejowski, J., & Chopin, N. (2015). On particle methods for parameter estimation in state-space models. *Statistical science*, 30(3), 328-351.
- [13] Kitagawa, G. (1996). Monte Carlo filter and smoother for non-Gaussian nonlinear state space models. *Journal of computational and graphical statistics*, 5(1), 1-25.
- [14] Kitagawa, G. (1998). A self-organizing state-space model. *Journal of the American Statistical Association*, 1203-1215.

- [15] Lettau, M., & Ludvigson, S. (2001). Consumption, aggregate wealth, and expected stock returns. *the Journal of Finance*, 56(3), 815-849.
- [16] Liu, J., & West, M. (2001). Combined parameter and state estimation in simulation-based filtering. In *Sequential Monte Carlo methods in practice* (pp. 197-223). Springer New York.
- [17] Maillard, S., Roncalli, T., & Teiletche, J. (2010). The Properties of Equally Weighted Risk Contribution Portfolios. *The Journal of Portfolio Management*, 36(4), 60-70.
- [18] Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77-91.
- [19] Pitt, M. K., & Shephard, N. (1999). Filtering via simulation: Auxiliary particle filters. *Journal of the American statistical association*, 94(446), 590-599.
- [20] Raggi, D., & Bordignon, S. (2011). Volatility, Jumps, and Predictability of Returns: A Sequential Analysis. *Econometric Reviews*, 30(6), 669-695.
- [21] Rios, M. P., & Lopes, H. F. (2013). The extended Liu and West filter: Parameter learning in Markov switching stochastic volatility models. In *State-Space Models* (pp. 23-61). Springer New York.
- [22] Roncalli, T. (2013). *Introduction to risk parity and budgeting*. CRC Press.
- [23] Takahashi, A., & Sato, S. (2001). A Monte Carlo filtering approach for estimating the term structure of interest rates. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 53(1), 50-62.
- [24] Taylor, S. J. (1986). *Modelling Financial Time Series*. New York: Wiley.
- [25] West, M. (1993a). Approximating posterior distributions by mixture. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 409-422.
- [26] West, M. (1993b). Mixture models, Monte Carlo, Bayesian updating, and dynamic models. *Computing Science and Statistics*, 325-325.
- [27] Welch, I., & Goyal, A. (2008). A comprehensive look at the empirical performance of equity premium prediction. *Review of Financial Studies*, 21(4), 1455-1508.
- [28] Yu, J. (2005). On leverage in a stochastic volatility model. *Journal of Econometrics*, 127(2), 165-178.
- [29] Zhou, X., Nakajima, J., and West, M. (2014) "Bayesian forecasting and portfolio decisions using dynamic dependent sparse factor models." *International Journal of Forecasting* 30.4: 963-980.

表 5: 平均分散ポートフォリオ

リスク回避度 γ	1	2.5	5	10	20	50	[等ウェイト]
複利リターン (年率, %)							
RMRV	6.51	7.14	7.65	6.80	6.59	4.68	6.39
SV	1.01	2.45	2.45	1.46	0.73	0.29	-
CMSV	6.72	5.50	7.12	6.99	5.70	3.00	-
RMSV	2.64	6.14	7.10	7.19	6.15	3.69	-
SMCV	10.32	11.48	10.88	9.73	7.20	4.16	-
SMRV	9.80	9.99	10.34	8.93	8.28	5.26	-
SMSV	16.19	15.75	16.23	14.97	12.44	6.97	-
シャープ・レシオ (年率)							
RMRV	0.45	0.51	0.61	0.64	0.76	0.90	0.50
SV	0.15	0.38	0.51	0.55	0.55	0.55	-
CMSV	0.39	0.36	0.49	0.62	0.73	0.74	-
RMSV	0.24	0.49	0.59	0.70	0.79	0.82	-
SMCV	0.58	0.65	0.66	0.70	0.74	0.83	-
SMRV	0.55	0.62	0.66	0.65	0.81	0.95	-
SMSV	0.89	0.93	1.01	1.05	1.14	1.13	-
ソルティノ・レシオ (年率)							
RMRV	0.64	0.75	0.93	0.97	1.25	1.74	0.71
SV	0.20	0.62	0.94	1.10	1.11	1.11	-
CMSV	0.54	0.48	0.68	0.94	1.25	1.42	-
RMSV	0.33	0.72	0.88	1.09	1.37	1.65	-
SMCV	0.99	1.11	1.10	1.18	1.30	1.58	-
SMRV	0.84	0.97	1.05	1.10	1.58	2.17	-
SMSV	1.55	1.67	1.91	2.27	2.78	2.69	-
最大ドローダウン							
RMRV	0.67	0.60	0.51	0.40	0.28	0.14	0.49
SV	0.50	0.29	0.18	0.09	0.05	0.02	-
CMSV	0.66	0.63	0.51	0.34	0.20	0.09	-
RMSV	0.62	0.48	0.40	0.29	0.16	0.09	-
SMCV	0.43	0.43	0.38	0.31	0.23	0.12	-
SMRV	0.54	0.40	0.36	0.32	0.23	0.12	-
SMSV	0.36	0.30	0.25	0.18	0.13	0.10	-

表 6: リスクパリティ

	RMRV	SV	CMSV	RMSV	SMCV	SMRV	SMSV
複利リターン (年率, %)	7.57	6.96	7.32	7.18	6.92	7.47	7.13
シャープ・レシオ (年率)	0.64	0.59	0.62	0.61	0.57	0.62	0.60
ソルティノ・レシオ (年率)	0.93	0.85	0.91	0.88	0.81	0.91	0.87
最大ドローダウン	0.41	0.42	0.41	0.41	0.46	0.42	0.42

表 7: 最小分散ポートフォリオ

	RMRV	SV	CMSV	RMSV	SMCV	SMRV	SMSV
複利リターン (年率, %)	5.48	4.50	5.09	4.80	6.12	4.92	5.12
シャープ・レシオ (年率)	0.52	0.46	0.51	0.49	0.55	0.47	0.52
ソルティノ・レシオ (年率)	0.74	0.64	0.73	0.69	0.79	0.66	0.74
最大ドローダウン	0.42	0.42	0.40	0.40	0.45	0.44	0.40

表 8: ポートフォリオ・ボラティリティ (年率, %)

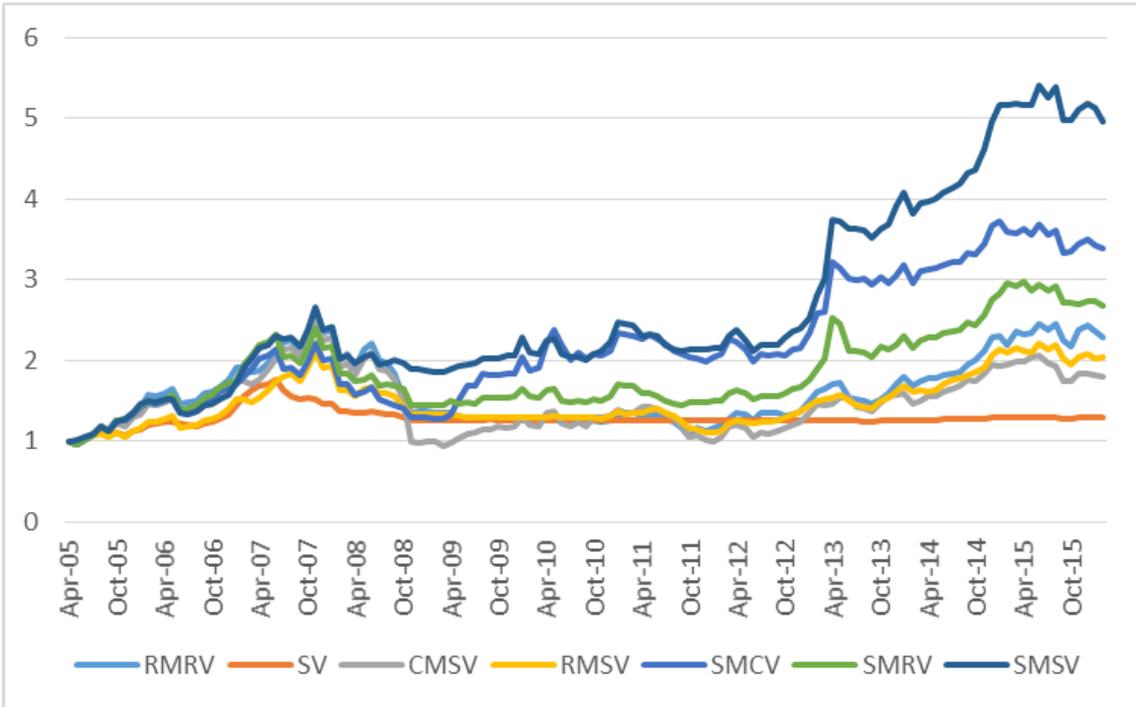
γ	平均分散						等ウェイト	リスクパリティ	最小分散
	1	2.5	5	10	20	50			
RMRV	20.84	18.81	15.55	12.99	9.79	5.52	14.47	12.81	11.60
SMSV	19.06	17.45	16.33	14.36	10.83	6.17	-	12.95	10.78

表 9: ウェイト制約付き平均分散ポートフォリオ

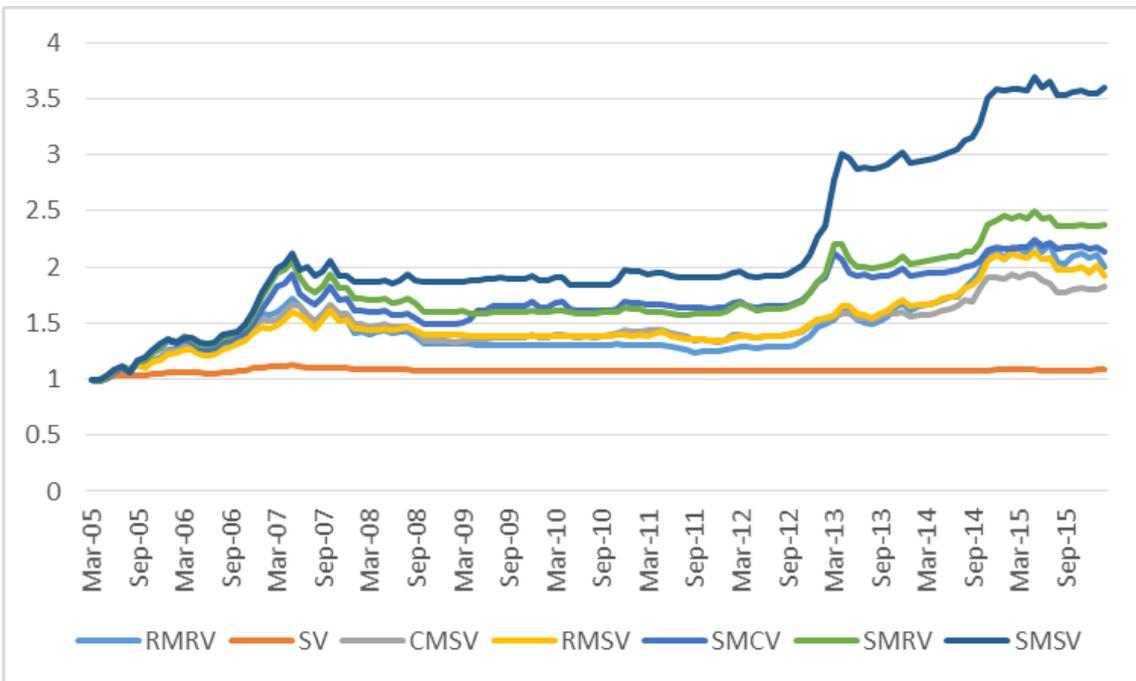
リスク回避度 γ	1	2.5	5	10	20	50
複利リターン (年率, %)						
RMRV	6.51	7.14	7.65	6.80	6.59	4.68
RMRV (制約 1)	7.50	7.42	7.87	7.05	6.64	4.68
RMRV (制約 2)	5.10	4.72	5.65	6.32	6.77	4.52
SMSV	16.19	15.75	16.23	14.97	12.44	6.97
SMSV (制約 1)	11.20	12.70	12.84	11.78	10.87	6.50
SMSV (制約 2)	11.00	9.30	9.48	9.86	9.24	6.15
シャープ・レシオ (年率)						
RMRV	0.45	0.51	0.61	0.64	0.76	0.90
RMRV (制約 1)	0.46	0.47	0.57	0.59	0.71	0.86
RMRV (制約 2)	0.42	0.41	0.50	0.59	0.76	0.86
SMSV	0.89	0.93	1.01	1.05	1.14	1.13
SMSV (制約 1)	0.65	0.77	0.84	0.88	1.04	1.00
SMSV (制約 2)	0.79	0.72	0.83	1.01	1.16	1.18
ソルティノ・レシオ (年率)						
RMRV	0.64	0.75	0.93	0.97	1.25	1.74
RMRV (制約 1)	0.65	0.69	0.86	0.89	1.15	1.63
RMRV (制約 2)	0.59	0.58	0.72	0.89	1.28	1.62
SMSV	1.55	1.67	1.91	2.27	2.78	2.69
SMSV (制約 1)	1.04	1.31	1.53	1.80	2.35	2.08
SMSV (制約 2)	1.27	1.12	1.39	1.95	2.61	3.04
最大ドローダウン						
RMRV	0.67	0.60	0.51	0.40	0.28	0.14
RMRV (制約 1)	0.67	0.61	0.49	0.38	0.27	0.14
RMRV (制約 2)	0.49	0.50	0.42	0.35	0.24	0.14
SMSV	0.36	0.30	0.25	0.18	0.13	0.10
SMSV (制約 1)	0.43	0.34	0.30	0.20	0.18	0.16
SMSV (制約 2)	0.34	0.35	0.27	0.16	0.11	0.07

表 10: 制約付きポートフォリオ ($|\omega_t - \omega_{t-1}| \leq 1/10$ の場合)

リスク回避度 γ	1	2.5	5	10	20	50
複利リターン (年率, %)						
RMRV	7.70	6.74	7.00	7.24	6.53	4.51
SMSV	5.60	6.13	7.62	7.09	6.97	4.85
シャープ・レシオ (年率)						
RMRV	0.46	0.43	0.49	0.61	0.69	0.83
SMSV	0.38	0.43	0.59	0.64	0.77	0.85
ソルティノ・レシオ (年率)						
RMRV	0.63	0.59	0.71	0.91	1.10	1.54
SMSV	0.54	0.63	0.95	1.12	1.45	1.65
最大ドローダウン						
RMRV	0.66	0.65	0.55	0.36	0.27	0.14
SMSV	0.56	0.46	0.32	0.27	0.24	0.16

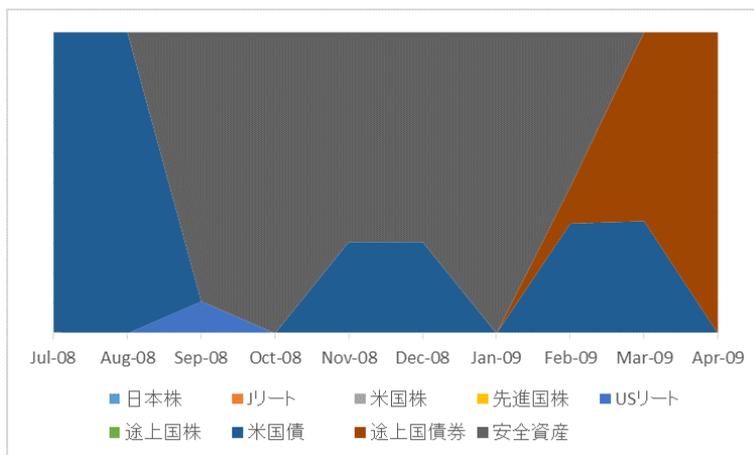


$\gamma = 2.5$

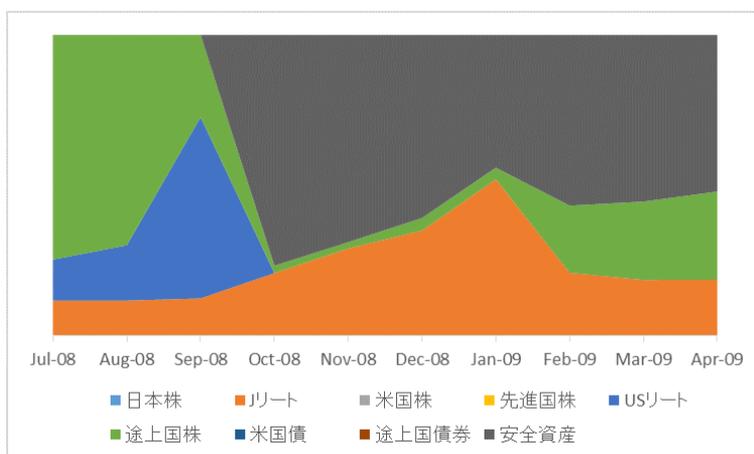


$\gamma = 20$

図 12: 平均分散ポートフォリオの価値推移



SMSV, $\gamma = 2.5$



CMSV, $\gamma = 2.5$

図 13: リーマンショック期の投資比率

平均分散ポートフォリオ, $\gamma = 2.5$ (SMSV)



平均分散ポートフォリオ, $\gamma = 20$ (SMSV)



リスクパリティポートフォリオ (RMRV)



最小分散ポートフォリオ (RMRV)

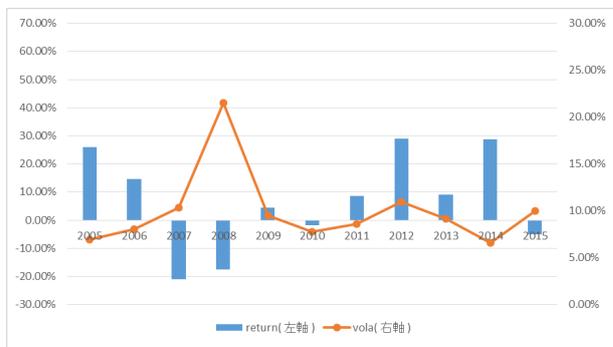
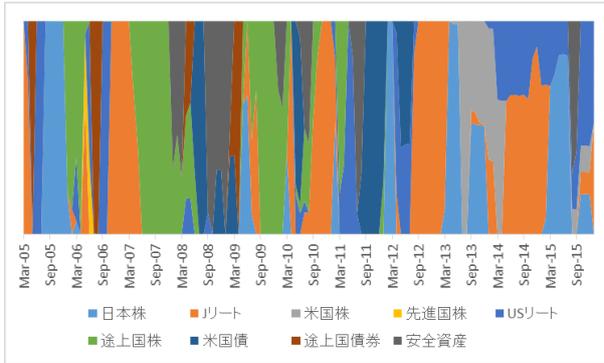
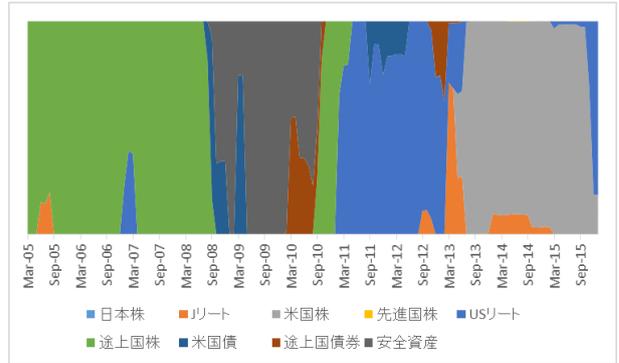


図 14: 年次リターン, 年次ボラティリティ

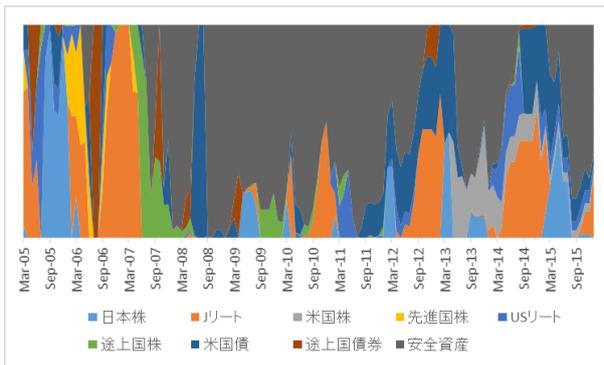
SMSV, $\gamma = 2.5$



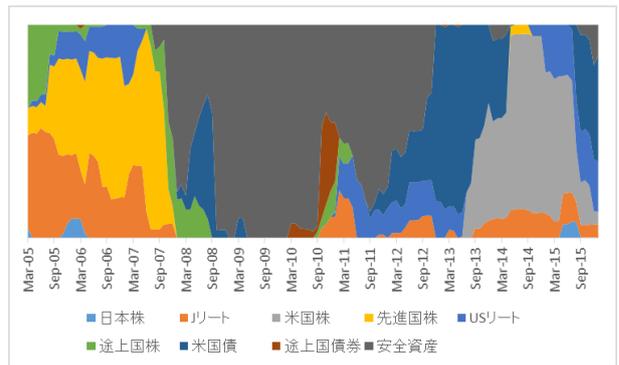
RMRV, $\gamma = 2.5$



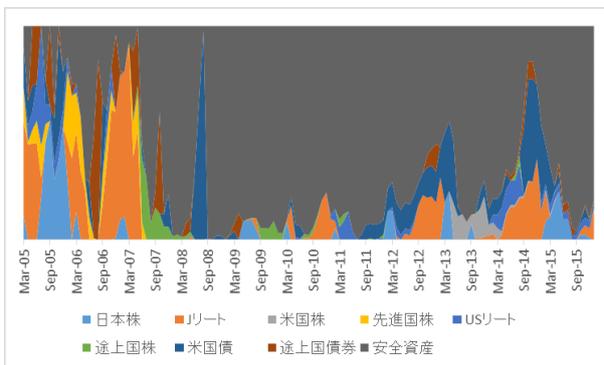
SMSV, $\gamma = 20$



RMRV, $\gamma = 20$



SMSV, $\gamma = 50$



RMRV, $\gamma = 50$

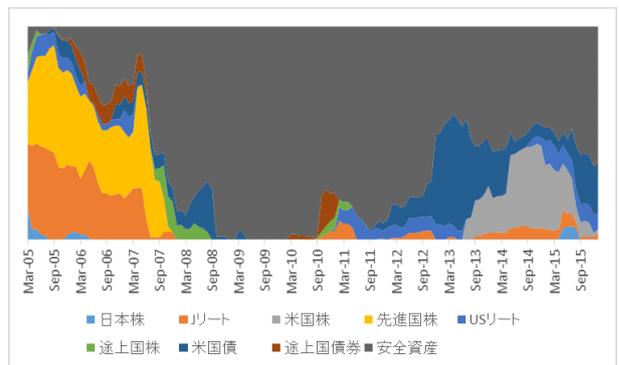


図 15: 平均分散ポートフォリオの投資比率

リスクパリティポートフォリオ (RMRV)

最小分散ポートフォリオ (RMRV)

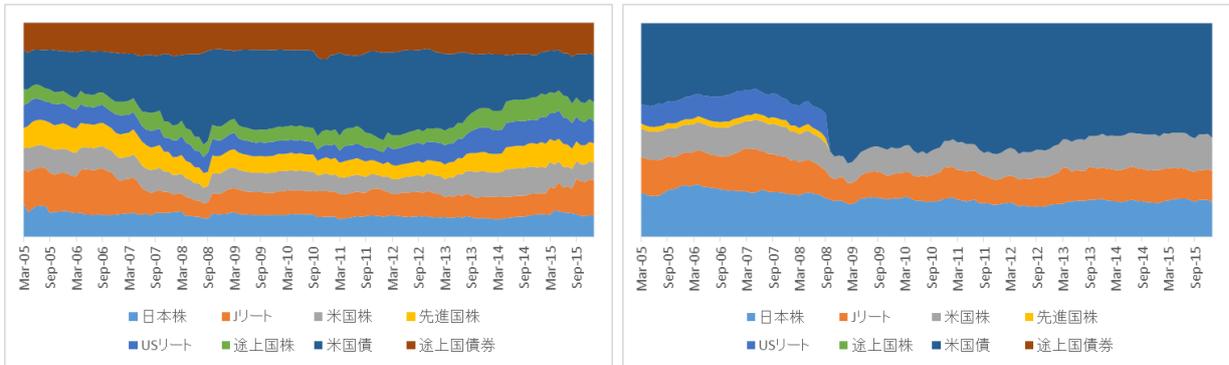


図 16: リスクパリティ及び最小分散の投資比率

$\gamma = 2.5$

$\gamma = 20$

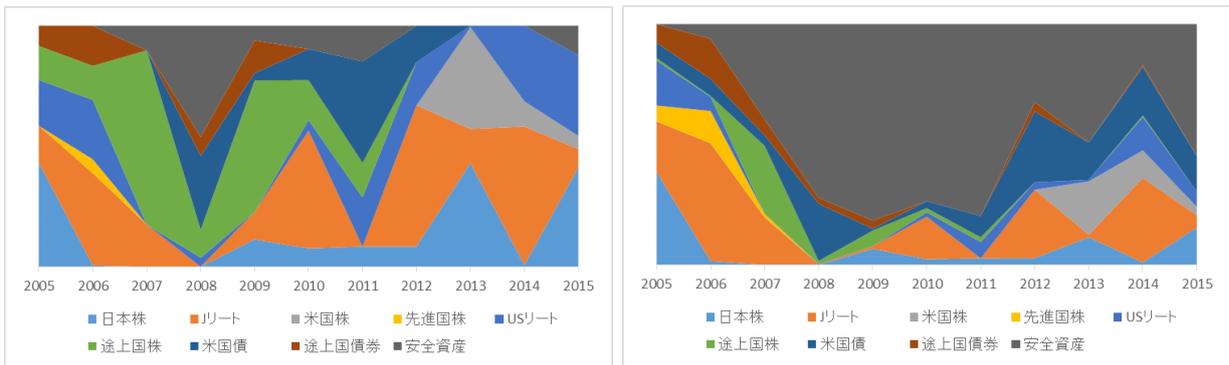
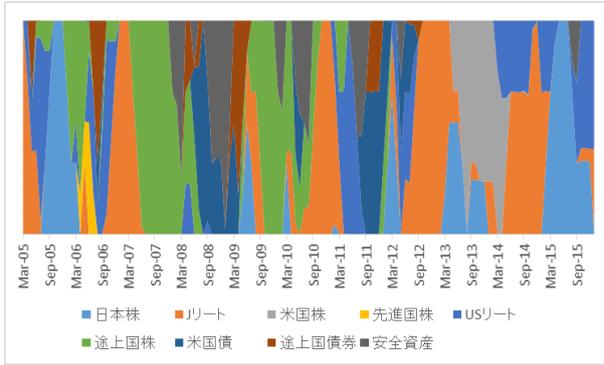
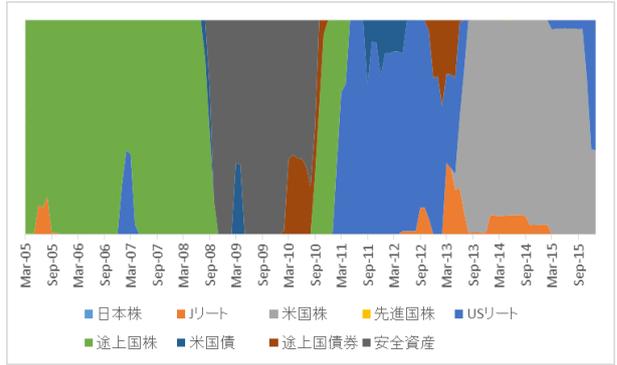


図 17: SMSV の年間投資比率

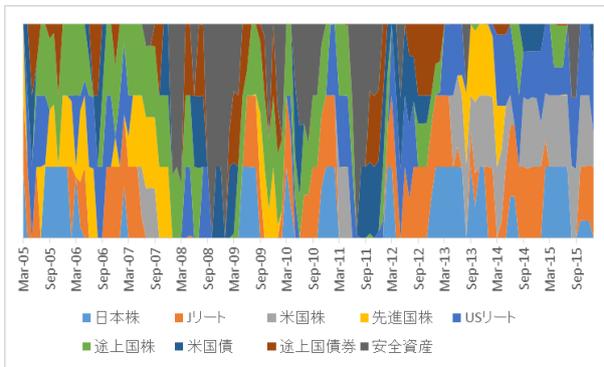
図 18: 投資比率 (制約付きポートフォリオ)



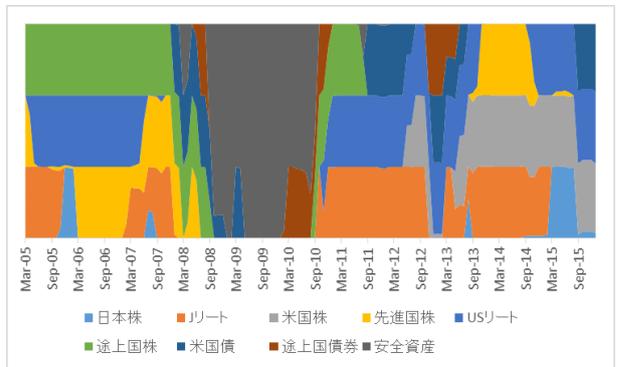
SMSV (制約 1) , $\gamma = 2.5$



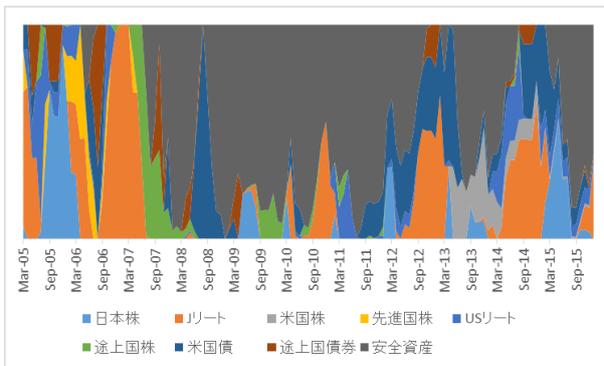
RMRV (制約 1) , $\gamma = 2.5$



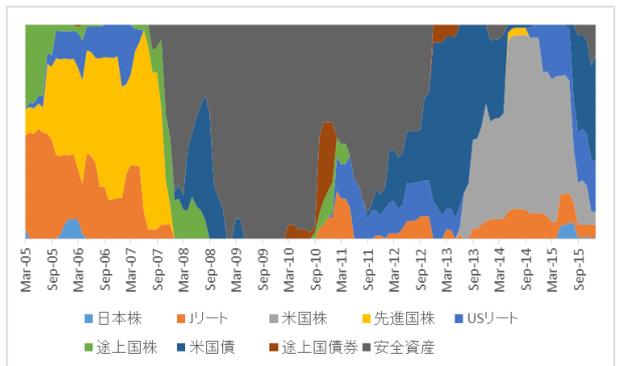
SMSV (制約 2) , $\gamma = 2.5$



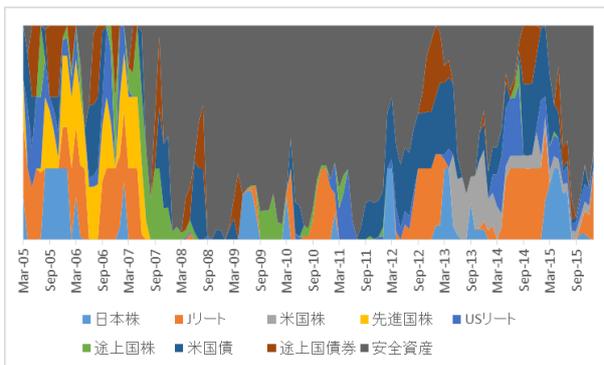
RMRV (制約 2) , $\gamma = 2.5$



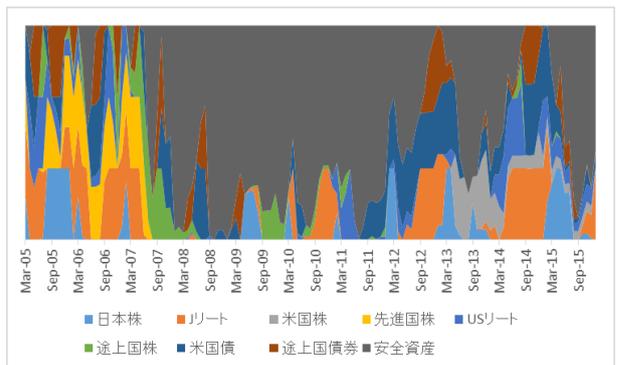
SMSV (制約 1) , $\gamma = 20$



RMRV (制約 1) , $\gamma = 20$



SMSV (制約 2) , $\gamma = 20$



RMRV (制約 2) , $\gamma = 20$

SMSV, $\gamma = 2.5$

SMSV, $\gamma = 20$

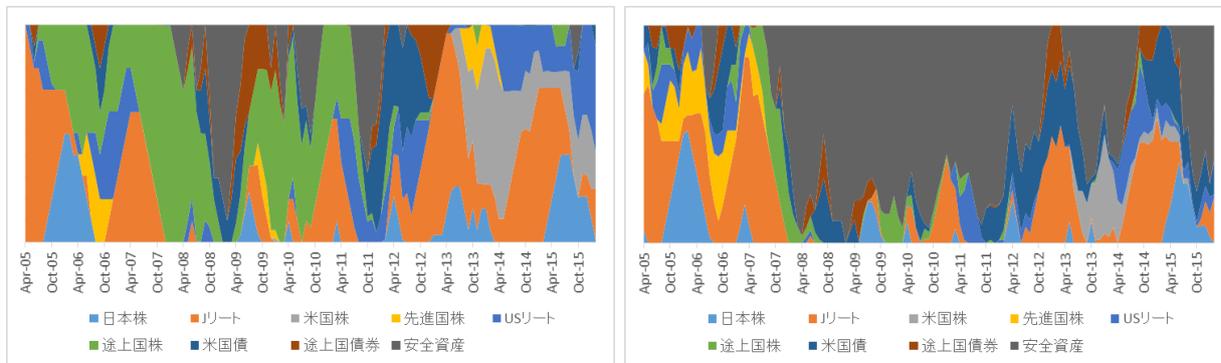


図 19: 投資比率 ($|\omega_t - \omega_{t-1}| \leq 1/10$ の場合)

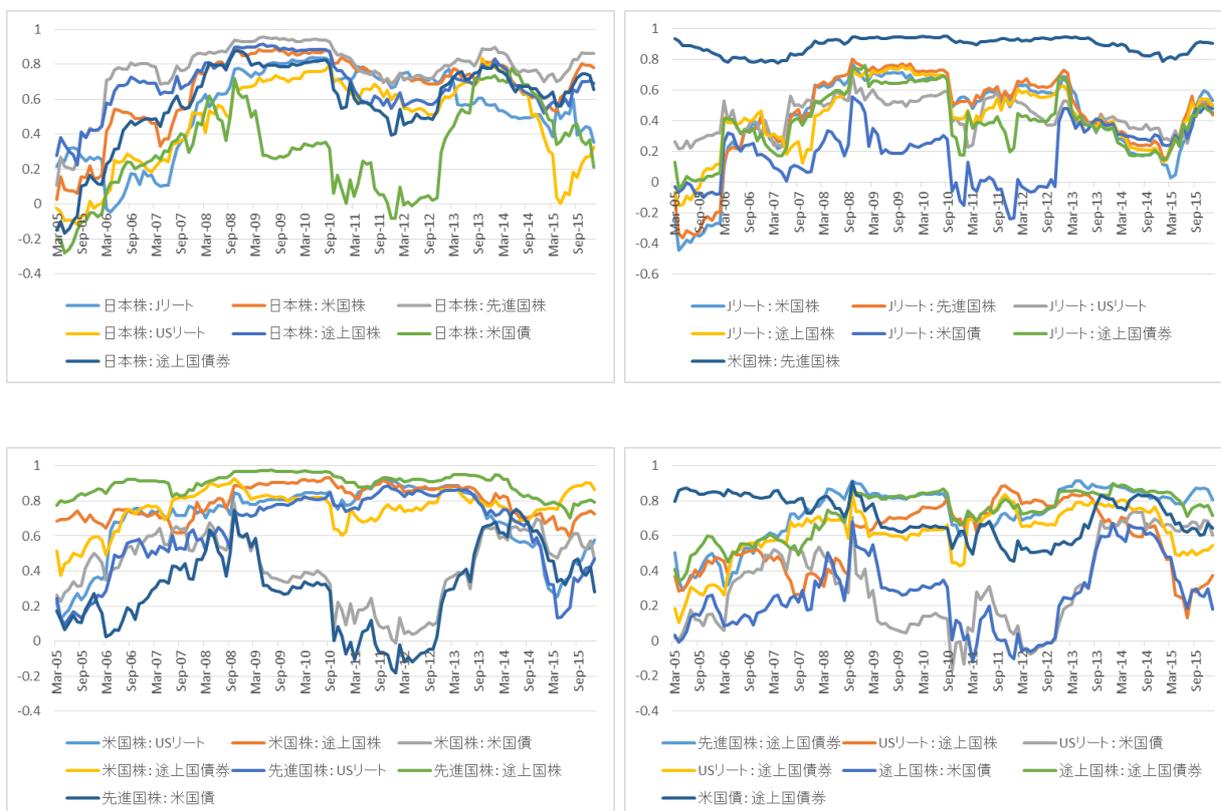


図 20: 相関係数